Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

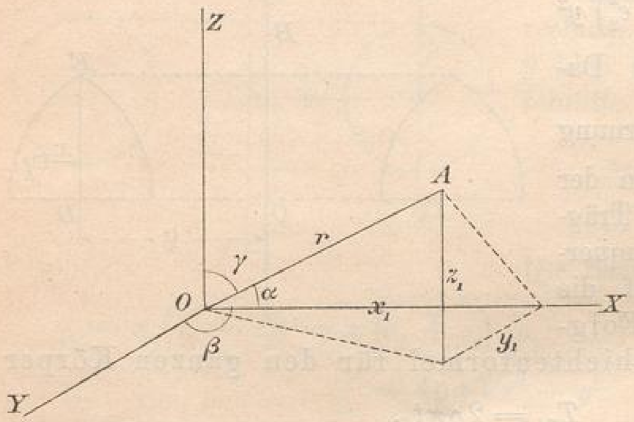
G. Der Drehungssatz für die Trägheitsachsen.

G. Der Drehungssatz für die Trägheitsachsen.

Einige Hülfsaufgaben der Raumgeometrie werden vorausgeschickt.

377) **Aufgabe.** Eine Gerade OA bilde mit der X-Achse und Y-Achse die Winkel α und β. Welchen Winkel γ bildet sie mit der Z-Achse?

Fig. 275.



Auflösung. Sind x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von A, so ist

$$x_1 = r\cos\alpha,$$
$$y_1 = r\cos\beta,$$
$$z_1 = r\cos\gamma,$$

aus

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2$$

folgt also

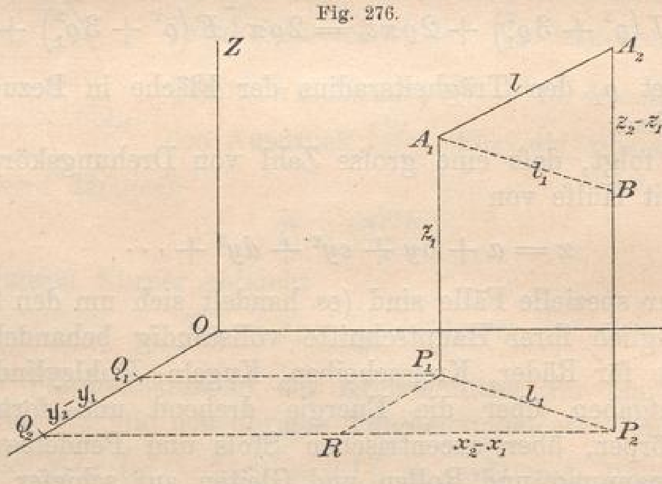
$$r^2\cos^2\alpha + r^2\cos^2\beta + r^2\cos^2\gamma = r^2, \text{ oder } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Demnach bestimmt sich γ aus

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

379) **Aufgabe.** Die Punkte A_1 und A_2 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 seien gegeben. Wie grofs ist ihre gegenseitige Entfernung?

Fig. 276.



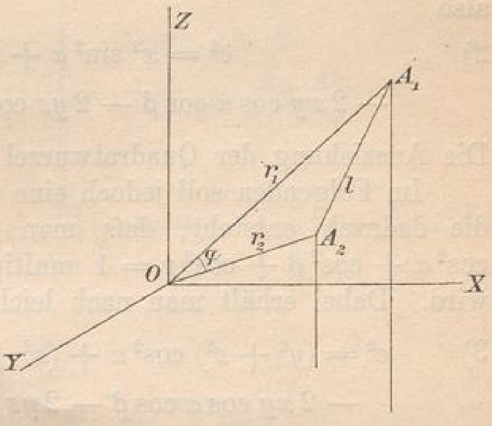
Auflösung. P_1 und P_2 seien die Projektionen der Punkte A_1 und A_2 auf die Grundebene, Q_1 und Q_2 die von P_1 und P_2 auf die Y-Achse, ferner sei $P_1R \parallel Q_1Q_2$, $A_1B \parallel P_1P_2$, dann ist

$$l_2 = l_1^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

also

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Fig. 277.



380) **Aufgabe.** Eine Gerade OA_1 bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel α_1, β_1 und γ_1, eine andere Gerade OA_2 die Winkel α_2, β_2 und γ_2. Der Schnittwinkel ϱ der beiden Geraden soll berechnet werden.

Auflösung. Der Cosinussatz giebt

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\varphi,$$

so dafs

$$2 r_1 r_2 \cos\varphi = r_1^2 + r_2^2 - l^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$
$$- [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2] = 2 x_1 x_2 + 2 y_1 y_2 + 2 z_1 z_2.$$

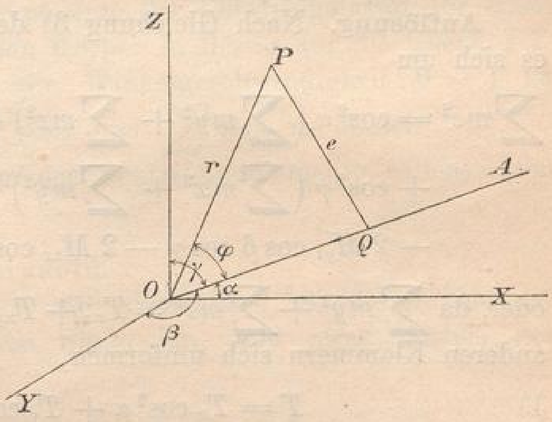
Folglich ist

$$\cos\varphi = \frac{x_1}{r_1}\frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1}\frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1}\frac{z_2}{r_2},$$

oder

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2$$
$$+ \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2.$$

Fig. 278.



381) **Aufgabe.** Wie grofs ist die Entfernung e eines Punktes x, y, z von einer Geraden OA, die mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet?

Auflösung. P sei der gegebene Punkt, Q seine Projektion auf die Gerade, $OP = r$ bilde mit den Achsen die Winkel ξ, η, ϑ, dann ist

$$e^2 = r^2 - OQ^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (r\cos\varphi)^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - r^2(\cos\alpha\cos\xi + \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\zeta)^2,$$

also, da $r\cos\xi = x$, $r\cos\eta = y$, $r\cos\zeta = z$ ist,

1) $$e^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 \cos^2\alpha + y^2 \cos^2\beta + z^2 \cos^2\gamma)$$
$$- 2xy \cos\alpha \cos\beta - 2yz \cos\beta \cos\eta - 2zx \cos\gamma \cos\alpha$$

oder
$$e^2 = x^2 (1 - \cos^2\alpha) + y^2 (1 - \cos^2\beta) + z^2 (1 - \cos^2\gamma)$$
$$- 2xy \cos\alpha \cos\beta - 2yz \cos\beta \cos\gamma - 2zx \cos\gamma \cos\alpha,$$

also

2) $$e^2 = x^2 \sin^2\alpha + y^2 \sin^2\beta + z^2 \sin^2\gamma$$
$$- 2xy \cos\alpha \cos\beta - 2yz \cos\beta \cos\gamma - 2zx \cos\gamma \cos\alpha.$$

Die Ausziehung der Quadratwurzel giebt e.

Im Folgenden soll jedoch eine andere Formel angewendet werden, die dadurch entsteht, dafs man in Formel 1) die Klammer mit $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ multipliziert, wodurch nichts geändert wird. Dabei erhält man nach leichter Umformung

3) $$e^2 = (y^2 + z^2) \cos^2\alpha + (z^2 + x^2) \cos^2\beta + (x^2 + y^2) \cos^2\gamma$$
$$- 2xy \cos\alpha \cos\beta - 2yz \cos\beta \cos\gamma - 2zx \cos\gamma \cos\alpha.$$

382) **Aufgabe.** Die axialen Trägheits- und Centrifugalmomente eines Körpers in Bezug auf ein Koordinatensystem seien bekannt. Wie grofs ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse OA, die mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β und γ bildet?

Auflösung. Nach Gleichung 3) des vorigen Abschnittes handelt es sich um

$$\sum me^2 = \cos^2\alpha \left(\sum my^2 + \sum mz^2\right) + \cos^2\beta \left(\sum mz^2 + \sum mx^2\right)$$
$$+ \cos^2\gamma \left(\sum mx^2 + \sum my^2\right) - 2 M_{xy} \cos\alpha \cos\beta$$
$$- 2 M_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2 M_{zx} \cos\gamma \cos\alpha,$$

oder, da $\sum my^2 + \sum mz^2 = T_{xz} + T_{xy} = T_x$ ist und entsprechend die anderen Klammern sich umformen,

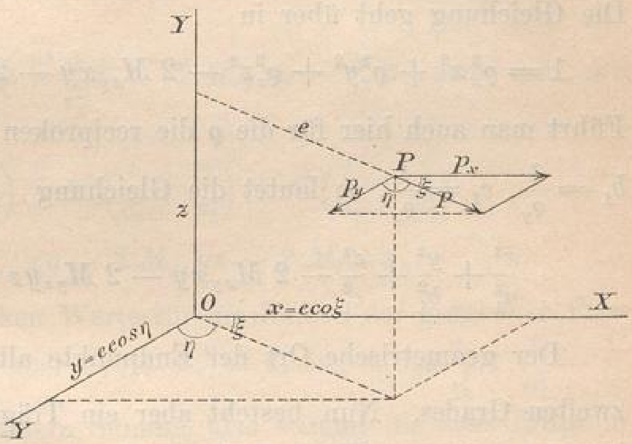
1) $$T = T_x \cos^2\alpha + T_y \cos^2\beta + T_z \cos^2\gamma$$
$$- 2 M_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2 M_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2 M_{zx} \cos\gamma \cos\alpha.$$

Das gesuchte Trägheitsmoment kann also mit Hülfe der Axialmomente und der Centrifugalmomente leicht bestimmt werden.

383) Bedeutung der Centrifugalmomente. Ein Körper drehe sich um die Z-Achse, und P sei die momentane Lage eines Körperteilchens, dessen Entfernung von der Drehungsachse gleich e

sein möge. Ist ϑ die Winkelgeschwindigkeit, so entsteht die Centrifugalkraft $p = me\vartheta^2$, die in den Richtungen der Koordinatenachsen die Komponenten $p_x = me\vartheta^2 \cos\xi$ und $p_y = me\vartheta^2 \cos\eta$ hat, wofür man schreiben kann $p_x = mx\vartheta^2$, $p_y = my\vartheta^2$. Die statischen Momente dieser Komponenten in Bezug auf die Grundebene sind

Fig. 279.



$$\vartheta^2 \sum mzx$$

und

$$\vartheta^2 \sum myz.$$

Ist $\vartheta = 1$, so hat man

$$M_{xz} = \sum mxz \text{ und } M_{yz} = \sum myz,$$

wobei x und z, ebenso y und z ihre Rolle vertauschen können. Also: $\sum mxz = M_{xz}$ ist zu deuten als das Moment der X-Komponente der Centrifugalkraft für einen sich um die z-Achse drehenden Körper in Bezug auf die Ebene XY, oder es bedeutet das Moment der Z-Komponente der Centrifugalkraft für einen sich um die X-Achse drehenden Körper in Bezug auf die Ebene YZ. In beiden Fällen ist jedoch die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = 1$ zu setzen. Entsprechend sind $\sum myz$ und $\sum mzx$ zu deuten.

Beispiele für Berechnung der Centrifugalmomente sollen unten gegeben werden.

384) Das Trägheitsellipsoid.

Man führe in Gleichung 1) des Abschnittes 382 die Radien der Trägheitsmomente im früheren Sinne ein, und zwar mittels der Gleichungen

$$\varrho^2 J = T,\ \varrho_x^2 J = T_x,\ \varrho_y^2 J = T_y,\ \varrho_z^2 J = T_z,$$

dividiert man dann beiderseits durch J, so erhält man

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \cos\alpha + \varrho_y^2 \cos\beta + \varrho_z^2 \cos\gamma$$
$$- 2 M_{xy} \cos\alpha\cos\beta - 2 M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2 M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.$$

Man berechne hieraus ϱ und trage den reciproken Wert $\frac{1}{\varrho}$ von O aus auf der Achse OA ab. Bezeichnet man die Koordinaten des

Endpunktes mit x, y, z, so dafs $\frac{1}{\varrho}\cos\alpha = x$, $\frac{1}{\varrho}\cos\beta = y$, $\frac{1}{\varrho}\cos\gamma = z$ ist, so kann man für sämtliche Cosinus ihre Werte $\cos\alpha = x\varrho$, $\cos\beta = y\varrho$, $\cos\gamma = z\varrho$ einsetzen, worauf sich beiderseits ϱ^2 weghebt. Die Gleichung geht über in

$$1 = \varrho_x^2 x^2 + \varrho_y^2 y^2 + \varrho_z^2 z^2 - 2\, M_{xy} xy - 2\, M_{yz} yz - 2\, M_{zx} zx.$$

Führt man auch hier für die ϱ die reciproken Werte ein, also $a_1 = \frac{1}{\varrho_x}$, $b_1 = \frac{1}{\varrho_y}$, $c_1 = \frac{1}{\varrho_z}$, so lautet die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} - 2\, M_{xy} xy - 2\, M_{yz} yz - 2\, M_{zx} zx = 1.$$

Der geometrische Ort der Endpunkte aller $\frac{1}{\varrho}$ ist also eine Fläche zweiten Grades. Nun besteht aber ein Trägheitsmoment $\sum mr^2$ aus lauter positiven Gliedern, kann also im allgemeinen nie Null sein. Kann aber ϱ nicht Null werden, so kann $\frac{1}{\varrho}$ nicht unendlich werden, d. h. die Fläche besitzt keine unendlich fernen Punkte, sie ist also ein Ellipsoid, aber nicht ein Paraboloid oder Hyperboloid. Sie heifst das Trägheitsellipsoid des Körpers für den Punkt O. Ist O der Schwerpunkt, so heifst die Fläche das Centralellipsoid des Körpers.

385) [Dasselbe Resultat hätte Gleichung 1) des Abschnittes 381 gegeben. Man hätte erhalten

$$\sum me^2 = \sum mx^2 \sin^2\alpha + \sum my^2 \sin^2\beta + \sum mz^2 \sin^2\gamma$$
$$- 2M_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2\, M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2\, M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$

oder

$$1)\qquad T = T_{yz}\sin^2\alpha + T_{zx}\sin^2\beta + T_{xy}\sin^2\gamma$$
$$- 2\, M_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2\, M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2\, M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha,$$

so dafs man das Axialmoment T auch mit Hülfe der Planmomente berechnen kann. Führt man die Trägheitsradien ein, so ergiebt sich

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}\sin^2\alpha + \varrho_{zx}\sin^2\beta + \varrho_{xy}\sin^2\gamma - 2\, M_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$
$$- 2\, M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2\, M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.$$

Berechnet man hieraus ϱ für jede Achse und trägt man den reciproken Wert $\frac{1}{\varrho}$ ein, so mufs man dieselbe Fläche erhalten, wie vorher. Hier giebt aber $\frac{1}{\varrho}\sin\alpha$ nicht eine Koordinate x, sondern den Abstand von der X-Achse, dessen Quadrat gleich $y^2 + z^2$ ist. Ebenso ist es mit den andern Gröfsen. Nach beiderseitiger Division durch ϱ erhält man

$$1 = \frac{y^2 + z^2}{a_2^2} + \frac{z^2 + x^2}{b_2^2} + \frac{x^2 + y^2}{c_2^2} - 2\, M_{xy}\, xy - 2\, M_{yz}\, yz - 2\, M_{zx}\, zx,$$

oder

$$x^2\left(\frac{1}{b_2^2} + \frac{1}{c_2^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{a_2^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{b_2^2}\right)$$
$$- 2\, M_{xy}\, xy - 2\, M_{yz}\, yz - 2\, M_{zx}\, zx,$$

wo a_2, b_2, c_2 die reciproken Werte für die Radien der gegebenen Planmomente bedeuten. Da aber $T_{xy} + T_{yz} = T_y$ ist, so ist $\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{a_2^2} = \frac{1}{b_2^2}$, ebenso ist es mit der andern Summe, also stimmt die neue Ellipsoidgleichung mit der früheren überein.]

386) Jedes Ellipsoid hat aber drei Hauptachsen a, b, c, für die seine Gleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hier fehlen die Teile $-2\, M_{xy}\, xy - 2\, M_{yz}\, yz - 2\, M_{zx}\, zx$, also müssen für die Hauptachsen als Koordinatenachsen die Centrifugalmomente gleich Null sein. Dies gilt von den Hauptachsen für jedes Trägheitsellipsoid eines Körpers.

Geht man also von den Hauptachsen eines solchen aus, so vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung für ein Trägheitsmoment zu folgender Gestalt:

$$T = T_x \cos^2\alpha + T_y \cos^2\beta + T_z \cos^2\gamma.$$

387) **Aufgabe.** Gegeben seien drei Trägheitsmomente T_1 in Bezug auf drei beliebige Achsen durch O, die mit den Hauptachsen die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bilden. Die Momente für die Hauptachsen sollen bestimmt werden.

Auflösung. Man stelle folgende Gleichungen auf:

$$T_x \cos^2\alpha_1 + T_y \cos^2\beta_1 + T_z \cos^2\gamma_1 = T_1,$$
$$T_x \cos^2\alpha_2 + T_y \cos^2\beta_2 + T_z \cos^2\gamma_2 = T_2,$$
$$T_x \cos^2\alpha_3 + T_y \cos^2\beta_3 + T_z \cos^2\gamma_3 = T_3.$$

Sie sind in Bezug auf die gesuchten T vom ersten Grade, lassen sich also leicht auflösen.

388) Bemerkung über die Dynamik.

Der Umstand, dafs die Centrifugalmomente für die Hauptachsen jedes Trägheitsellipsoides verschwinden, ist für die Dynamik von besonderer Bedeutung.

Aus Abschnitt 4 ist bekannt (ebenso durch die Deutung in Nr. 383), dafs bei der Drehung eines Körpers um eine feste Achse an dieser ein umstürzendes, d. h. auf Änderung der Achsenrichtung wirkendes Kräftepaar zur Geltung kommt. Dieses Kräftepaar wird aber nach obigem Null, wenn der Körper sich um eine der Hauptachsen des ihm zugehörigen Trägheitsellipsoides dreht. Dann also bleibt nur eine auf Parallelverschiebung der Achse hinarbeitende Centrifugalkraft übrig. Geht aber die Drehungsachse durch den Schwerpunkt des Körpers, oder handelt es sich um das Centralellipsoid, so ist auch die letztere Kraft gleich Null, so dafs weder Kraft noch Kräftepaar wirken. Daraus folgt im letzteren Falle:

Dreht sich ein Körper um eine Hauptachse des Centralellipsoides seiner Trägheitsmomente, so wird die Achse durch die Drehung in keiner Weise beeinflufst, d. h. sie übernimmt die Rolle einer freien Achse.

Angenommen z. B. der Erdkörper oder vielmehr das an seine Stelle zu setzende ideale Geoid sei ein homogenes dreiachsiges Ellipsoid, dessen Hauptachsen, wie sich zeigen wird, mit denen seines Trägheitsellipsoides zusammenfallen, angenommen ferner, die Drehung finde um eine der Hauptachsen statt, so würde diese Drehungsachse, vorausgesetzt dafs keine äufseren Kräfte störend einwirken, ihre Richtung im Raume konstant beibehalten.

Würde jedoch durch irgend welche äufsere Einwirkung, z. B. durch hinreichend wuchtigen Anprall eines Meteorsteins oder eines Weltkörpers eine andere Achse zur Drehungsachse gemacht, die nicht Hauptachse ist, so würde deren Richtung nicht konstant bleiben, sondern näher zu untersuchenden Schwankungen unterworfen sein.

Wird ein homogener Rechteckskörper emporgeschleudert, so bewegt sich sein Schwerpunkt in einer Parabel und aufserdem findet Drehung um eine Schwerpunktsachse statt. Ist zufällig eine der Mittellinien die Drehungsachse, so behält sie während des Wurfes ihre Lage bei, sonst aber ist dies nicht der Fall. Hierbei ist selbstverständlich vom Luftwiderstande abgesehen.

389) Fälle besonderer Einfachheit. In vielen Fällen ist die oben angegebene Berechnung der Hauptachsen nicht nötig, da man direkt aus der Gestalt des Körpers auf ihre Lage schliefsen kann. Ist z. B. die ZY-Ebene eine Symmetriebene des Körpers, so gehört

zu jedem Elemente mxy des Centrifugalmomentes ein symmetrisches $m(-x)y = -mxy$, so dafs je zwei einander aufheben. In diesem Falle ist also $\sum mxy = 0$ und $\sum mxz = 0$ und jedes auf der Symmetrieebene errichtete Lot ist Hauptachse für das Trägheitsellipsoid, welches zu seinem Fufspunkte gehört. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man die eine Hauptachsenrichtung für das Centralellipsoid.

Sind zwei Symmetrieebenen vorhanden, z. B. die Ebene ZY und XZ, so ist wegen der ersteren $\sum mxy = 0$ und $\sum mxz = 0$, wegen der zweiten $\sum myz = 0$ (und $\sum myx = 0$). Weil für jeden Punkt ihrer Schnittlinie alle drei Momente verschwinden, hat man in jedem sofort in den Loten und den Schnittlinien die drei Hauptachsen des Trägheitsellipsoides. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man die des Centralellipsoides.

Sind drei Symmetrieebenen vorhanden, die nicht durch ein und dieselbe Gerade gehen, so hat man in ihren Schnittlinien die Hauptachsen des Centralellipsoides.

Gehen hingegen die drei Symmetrieebenen durch eine Gerade, so ist für jeden Punkt der Schnittlinie das Trägheitsellipsoid ein Drehungsellipsoid mit der Geraden als Achse. Wählt man den Schwerpunkt, so hat man das centrale Drehungsellipsoid.

Werden die letztgenannten drei Symmetrieebenen durch eine vierte (rechtwinklig) geschnitten, so handelt es sich um das centrale Drehungsellipsoid. Dies ist z. B. der Fall bei jedem regelmäfsigen Prisma. Bei einer gewissen Länge desselben ist das centrale Drehungsellipsoid eine Kugel, in anderen Fällen ist die Drehungsachse die kleinere oder die gröfsere des Drehungsellipsoides. Beim Rechteckskörper hat man den Fall der Kugel, wenn er ein Würfel ist. Man versuche den Fall der Kugel bei dem dreiseitigen, sechsseitigen u. s. w. regelmäfsigen Prisma aufzufinden. Beispiele folgen in Nr. 398 und 400.

Bei jedem regelmäfsigen Körper ist das Centralellipsoid eine Kugel.

390) Folgerungen aus der Existenz des Trägheitsellipsoides.

a) Weil jeder Halbmesser den umgekehrten Wert des ihm zugehörigen axialen Trägheitsmomentes angiebt, so braucht man nur die drei Hauptträgheitsmomente zu kennen, um geometrisch oder rechnerisch sämtliche für das durch O gehende Strahlenbündel zu finden.

b) Sind a, b, c die nach der Gröfse geordneten Hauptachsen, so entspricht die längste a dem kleinsten Trägheitsmoment, die kürzeste c dem gröfsten für das vorliegende Strahlenbündel.

c) Es war für beliebig gerichtete Koordinaten durch einen beliebigen Punkt für den gegebenen Körper

$$T_{xy} + T_{yz} = T_y, \quad T_{yz} + T_{zx} = T_z, \quad T_{zx} + T_{xy} = T_x,$$
$$T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = T_p,$$

folglich ist

$$T_x + T_y + T_z = 2\,(T_{xz} + T_{yx} + T_{zx}) = 2\,T_p$$

und

$$T_p = T_y + T_{zx} = T_z + T_{xy} = T_z + T_{yz}.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch schreiben als folgende

$$\varrho_{xy}^2 + \varrho_{yz}^2 = \varrho_y^2, \quad \varrho_{yz}^2 + \varrho_{zx}^2 = \varrho_z^2, \quad \varrho_{zx}^2 + \varrho_{xy}^2 = \varrho_x^2,$$
$$\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2 = 2\,(\varrho_{xy}^2 + \varrho_{yz}^2 + \varrho_{zx}^2) = 2\,\varrho_p^2,$$
$$\varrho_p^2 = \varrho_y^2 + \varrho_{zx}^2 = \varrho_z^2 + \varrho_{xy}^2 = \varrho_z^2 + \varrho_{yz}^2.$$

Die polaren, axialen und planen Trägheitsmomente hängen also einfach zusammen, und die verschiedenen Arten von Trägheitsradien lassen sich durch Pythagoreische Addition oder Subtraktion aus einander ableiten.

d) **Aufgabe.** Die Trägheitsradien ϱ_x, ϱ_y, ϱ_z seien bekannt, wie findet man alle übrigen mit diesen Achsen zusammenhängenden Trägheitsradien?

Auflösung. $\varrho_p = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2}, \quad \varrho_{xy} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_z^2},$

$$\varrho_{yz} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_x^2}, \quad \varrho_{zx} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_y^2}.$$

e) Aus $\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2 = 2\,\varrho_p^2$ folgt der Satz: Die Summe der Trägheitsmomente für je drei auf einander senkrechte Achsen ist eine konstante Gröfse, nämlich gleich dem doppelten Quadrate des polaren Trägheitsmomentes.

Daraus folgt der geometrische Satz:

Die Summe der Quadrate der reciproken Werte je dreier auf einander senkrechter Halbmesser des Ellipsoides ist eine konstante Gröfse, und zwar gleich $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

f) Ist ferner der Satz bekannt, dafs die Summe der Quadrate je dreier konjugierter Halbmesser des Ellipsoides konstant ist, so kann man für die entsprechenden axialen Trägheitsmomente folgern, dafs die Summe ihrer reciproken Werte konstant sei, nämlich gleich $\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} + \frac{1}{T_c}$.

391) **Satz.** Legt man durch einen Punkt einer der Hauptachsen des Centralellipsoides Parallele zu den beiden andern Hauptachsen, so hat man für den Punkt die Richtungen der drei Hauptachsen des zugehörigen Trägheitsellipsoides.

Beweis. Wird der Punkt $x = a$ auf der X-Achse zur Untersuchung genommen, so handelt es sich in Bezug auf diesen um die neuen Koordinaten $\xi = (x - a)$, $\eta = y$, $\zeta = z$. Die Centrifugalmomente für das neue Koordinatensystem sind also 1) $\sum m\xi\eta = \sum m(x-a)z = \sum mxy - \sum may = \sum mxy - aJy_s = 0$, denn $\sum mxy$ war im alten Systeme gleich Null, da es sich um die Hauptachse des Centralellipsoides handelte, und der Schwerpunktsabstand y_s ist gleich Null, denn er liegt im Mittelpunkte des Centralellipsoides.

2) $\sum m\eta\zeta = \sum myz = 0$ aus entsprechendem Grunde.

3) $\sum m\zeta\xi = \sum mz(x-a) = \sum mxz - \sum maz = \sum mxz - aJz_s = 0$, ähnlich wie vorher.

392) Verschiebungssatz für das Centrifugalmoment.

Verschiebt man den Nullpunkt des Koordinatensystems um $-a$, $-b$, $-c$ vom Schwerpunkte weg, so werden die Centrifugalmomente M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} in $M_{xy} + abJ$, $M_{yz} + bcJ$, $M_{xz} + caJ$ verwandelt.

Beweis. $\sum mxy$ geht über in $\sum m(x+a)(y+b) = \sum mxy + a\sum my + b\sum mx + ab\sum m$.

Dabei ist $\sum my = 0$ und $\sum mz = 0$, weil es sich um den Schwerpunkt als Nullpunkt des Koordinatensystems handelt. Es bleibt übrig

$$M_{x_1 y_1} = M_{xy} + abJ.$$

Ebenso ist es bei den beiden andern Momenten.

393) Ist in $M_{xy} + abJ$ eine der beiden Koordinaten a, b gleich Null, so ist der Zusatz Null. Folglich:

Verschiebt man das Centrifugalmoment auf einer Schwerpunktsachse, so bleibt es ungeändert.

Ist die Schwerpunktsachse nun Hauptachse des Centralellipsoides, so bleibt der Wert des Centrifugalmomentes gleich Null, wenn man es auf dieser verschiebt.

394) **Anwendung.** Für den Schwerpunkt der Kugel sind in Bezug auf beliebig gerichtete Koordinatenachsen x, y, z die Centri-

fugalmomente gleich Null, weil sämtliche Achsen Hauptachsen sind. Verschiebt man nach $-a$, $-b$, $-c$, so erhält man

$$M_{x_1 y_1} = ab\,\tfrac{4}{3}\,r^3\pi\,, \quad M_{y_1 z_1} = bc\,\tfrac{4}{3}\,r^3\pi\,, \quad M_{z_1 x_1} = ca\,\tfrac{4}{3}\,r^3\pi\,.$$

Ebenso ist es bei allen Körpern mit drei Symmetrieebenen, welche die drei Hauptachsen des Centralellipsoides geben. Man kann also für beliebige parallele Koordinatenebenen sofort die Centrifugalmomente hinschreiben.

395) Bisweilen lassen sich die Centrifugalmomente leicht für andere Koordinatenachsen berechnen, bei Sektoren von Drehungskörpern z. B. in Bezug auf die Drehungsachse z und die zugehörigen Achsen x und y. Dann hat man die Verschiebung nach dem Schwerpunkte hin vorzunehmen, wobei der Ausdruck abJ bezw. bcJ, caJ abzuziehen ist. Einige Beispiele sollen später gegeben werden.

396) **Aufgabe.** In Bezug auf die Hauptebene eines Trägheitsellipsoides seien bekannt T_{xy}, T_{yz}, T_{zx}. Wie grofs ist das Trägheitsmoment T in Bezug auf eine durch den Koordinatennullpunkt gelegte Ebene, die mit den Hauptebenen yz, zx, xy die Winkel α, β (und γ) bildet?

Auflösung. Zunächst bestimmt sich γ aus der Gleichung

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

Aus Gleichung 1) des Abschnittes 385 folgt für das Lot l auf der gegebenen Ebene, welches mit den Achsen dieselben Winkel α, β und γ bildet,

$$T_l = T_{yz}\sin^2\alpha + T_{zx}\sin^2\beta + T_{xy}\sin^2\gamma\,,$$

denn die Centrifugalmomente fallen weg. Folglich ist für die gegebene Ebene im Anschlufs an 390c

$$T = T_p - T_l = T_{yz} + T_{zx} + T_{xy} - (T_{yz}\sin^2\alpha + T_{zx}\sin^2\beta + T_{xy}\sin^2\gamma)$$

oder

$$T = T_{yz}\cos^2\alpha + T_{zx}\cos^2\beta + T_{xy}\cos^2\gamma.$$

Die Formel für Planmomente ist also ganz analog der Formel für die Axialmomente.

397) Möglichkeit von Fixpunkten. Früher wurde gezeigt, dafs für jede ebene Fläche zwei Fixpunkte existieren, in Bezug auf

welche die Trägheitsellipse ein Kreis ist. Es fragt sich, ob solche auch für jeden Körper in dem Sinne vorhanden sind, daſs das Trägheitsellipsoid in Bezug auf sie eine Kugel ist, so daſs auch hier Erleichterungen eintreten würden. Es wird sich zeigen, daſs dies im allgemeinen nicht, sondern nur unter gewissen Bedingungen der Fall ist.

Man gehe von dem Koordinatensysteme der Hauptachsen des Centralellipsoides mit dem Schwerpunkte als Nullpunkt aus. Soll ein Punkt mit den Koordinaten a, b, c ein Fixpunkt sein, so müssen die durch ihn gelegten Parallelen zu den Koordinatenachsen Hauptachsen sein, denn jede Gerade durch den Mittelpunkt ist für die Kugel Hauptachse. Für diese Parallelen müſsten also die Centrifugalmomente verschwinden, d. h. es müſste sein

$$1)\quad \sum m(y-b)(z-c)=0,\quad 2)\quad \sum m(z-c)(x-a)=0,$$
$$3)\quad \sum m(x-a)(x-b)=0.$$

Zunächst soll die erste dieser Gleichungen untersucht werden. Sie lautet

$$\sum myz - b\sum mz - c\sum my + bc\sum m = 0.$$

Weil die Koordinaten Hauptachsen waren, ist $\sum myz = 0$ als zugehöriges Centrifugalmoment. Ferner ist $b\sum mz = bJz_s$, wo J der Inhalt des Körpers, z_s sein Schwerpunktsabstand ist. Dieser aber ist Null, denn es war vom Centralellipsoid ausgegangen, also ist $b\sum mz = 0$. Ebenso ist $c\sum my = 0$. Die Gleichung beschränkt sich auf $bc\sum m = bcJ = 0$. Da J als Körperinhalt von Null verschieden ist, muſs das Produkt $bc = 0$ sein.

Ebenso giebt die zweite Gleichung die Bedingung $ca = 0$, die dritte die Bedingung $ab = 0$.

Erste Bedingung dafür, daſs der Punkt ein Fixpunkt sei, ist also, daſs zwei der Koordinaten a, b, c gleich Null sind, d. h. der Punkt muſs auf einer der Koordinatenachsen liegen, d. h. auf einer Hauptachse. Angenommen nun, der Punkt habe die Koordinaten a, $b=0$, $c=0$, er liege also auf der durch den Schwerpunkt gehenden X-Achse, so sind, wenn T_x, T_y, T_z die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptachsen bedeuten, die in Bezug auf die durch den Punkt gelegten Parallelen genommenen T_x, $T_y + a^2J$, $T_z + a^2J$ (Verschiebungssatz). Da sie aber gleich groſs sein sollen, so folgt zunächst aus $T_y + a^2J = T_z + a^2J$, daſs $T_y = T_z$ sein muſs, d. h. das ursprüngliche Centralellipsoid muſs ein Drehungsellipsoid mit der X-Achse als Drehungsachse sein. Ferner folgt aus $T_x = T_y + a^2J$, daſs $T_x > T_y$ und ebenso $T_x > T_z$ sein mufs, d. h. die X-Achse ist die kleinere Achse der Ellipse, durch deren Umdrehung das Centralellipsoid entstanden ist. Ist dies der Fall, so findet man a reell aus der Gleichung $T_x = T_y + a^2 J$ als

$$a = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}.$$

Folglich: Soll es Punkte geben, für die das Trägheitsellipsoid eine Kugel ist, so mufs das Centralellipsoid ein durch Drehung um die kleinere Achse entstandenes Drehungsellipsoid sein. Je nachdem diese Drehungsachse die X-Achse, Y-Achse oder Z-Achse ist, hat man auf ihr die Punkte zu suchen in der Entfernung

$$a = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}, \quad \text{oder} \quad b = \pm \sqrt{\frac{T_y - T_z}{J}}, \quad c = \pm \sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}}.$$

Dafs diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, ergiebt sich aus der Probe für a. Ist nämlich das Centralellipsoid durch Drehung um die X-Achse entstanden, so ist zunächst $T_y = T_z$, und wenn die X-Achse die kleinere Achse war, $T_x > T_y$. Folglich giebt es auf der X-Achse Punkte

$$x = \pm \sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}} = a.$$

In Bezug auf jeden der beiden Punkte ist $\frac{T_x - T_y}{J}$ oder $T_x = T_y + a^2 J$ und da $T_y = T_z$ ist, $T_x = T_z + a^2 J$. Weil die drei Momente gleich sind, ist das Trägheitsellipsoid für die beiden Punkte eine Kugel.

398) **Beispiel.** Das quadratische Prisma mit den Kanten a, a, h.

Die Mittellinien sind Hauptachsen des Centralellipsoids, und zwar soll h der Achsenrichtung z entsprechen. Die Hauptträgheitsmomente sind dann

$$T_y = \frac{J}{12}(a^2 + h^2), \; T_y = \frac{J}{12}(h^2 + a^2), \; T_z = \frac{J}{12}(a^2 + a^2) = \frac{J}{6}a^2,$$

also ist $T_x = T_y$, so dafs es sich um ein centrales Drehungsellipsoid handelt. Ist nun $h < a$, so giebt $c = \pm \sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}}$ zwei reelle Werte, nämlich $c = \pm \sqrt{\frac{a^2}{6} - \frac{a^2 + h^2}{12}} = \pm \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{12}}$. Diese Punkte sind die Fixpunkte, wie auch die Probe ergiebt.

Ist $a = h$, so fallen die Punkte $\pm c$ in den Schwerpunkt, und es handelt sich um den Würfel, dessen Centralellipsoid eine Kugel ist.

399) **Bemerkung.** Für jedes regelmäfsige Prisma und für jedes Prisma oder jeden Cylinder mit mehr als zwei durch die Achse gehenden Symmetrieebenen ist das Centralellipsoid ein Drehungsellipsoid, z. B. mit der z-Achse als Drehungsachse. Es läfst sich also stets eine Höhe h so bestimmen, dafs das Centralellipsoid eine Kugel wird. Diese Höhe ist der Grenzwert für die Existenz von Fixpunkten.

400) Beispiel des regelmäfsigen dreiseitigen Prismas.

$$T_x = \frac{b^2 h^3 \sqrt{3}}{48} + \frac{b^4 h \sqrt{3}}{96} = T_y, \quad T_z = \frac{b^4 h \sqrt{3}}{48}.$$

Setzt man $T_z = T_x$, so folgt $h = b\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Für diese Höhe ist das Centralellipsoid eine Kugel, bei geringerer Höhe aber sind zwei leicht zu berechnende Fixpunkte vorhanden, nämlich in der Entfernung

$$c = \pm\sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{b^4 h\sqrt{3}}{96} - \frac{2 b^2 h^3 \sqrt{3}}{96}}{\frac{b^2}{4}\sqrt{3}\, h}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 2h^2}{24}}.$$

401) Entsprechendes gilt von den Planmomenten. Handelt es sich wieder um $x = a$, ist also $T_{xy} = T_{xz}$, so bleiben diese beiden Momente für a unverändert, nur T_{yz} verwandelt sich in $T_{yz} + a^2 J$. Soll nun $T_{yz} + a^2 J = T_{zx}$ sein, so folgt $a = \pm\sqrt{\frac{T_{zx} - T_{yz}}{J}}$, was mit $a = \pm\sqrt{\frac{T_x - T_y}{J}}$ identisch ist. Ebenso ist im Falle b

$$b = \pm\sqrt{\frac{T_{yx} - T_{zx}}{J}}, \text{ im Falle c dagegen } c = \pm\sqrt{\frac{T_{zy} - T_{xy}}{J}}.$$

Bedeutung und Anwendbarkeit der Fixpunkte sind also für Körper weit geringer, als für ebene Flächen, weil nur der Drehungsfall ins Auge zu fassen ist.

402) Die Aufgabe, mit Hülfe der Fixpunkte die Momente für beliebige Ebenen und Achsen zu finden, ist genau nach Fig. 122 zu lösen, denn man kann das Koordinatensystem so legen,

dafs die Schnittlinie der durch S gelegten Schrägebene mit der Y-Achse zusammenfällt. (In der Figur ist dann γ statt α zu schreiben.)

Die Gleichung für Flächen

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 \cos^2\alpha + \varrho_{zy}^2 \cos^2\beta + \varrho_{xy}^2 \cos^2\gamma$$

oder die für Achsen geltende

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \cos^2\alpha + \varrho_y^2 \cos^2\beta + \varrho_z^2 \cos^2\gamma$$

vereinfacht sich dann dadurch, dafs $\beta = 90^0$ und $\gamma = 90^0 - \alpha$ wird, also

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 \sin^2\gamma + \varrho_{xy}^2 \cos^2\gamma,$$

bezw.

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \sin^2\gamma + \varrho_z^2 \cos^2\gamma.$$

Da nun

$$c = \pm\sqrt{\frac{T_{zy} - T_{xy}}{J}} = \pm\sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}} = \pm\sqrt{\varrho_{zy}^2 - \varrho_{xy}^2} = \pm\sqrt{\varrho_z^2 - \varrho_x^2}$$

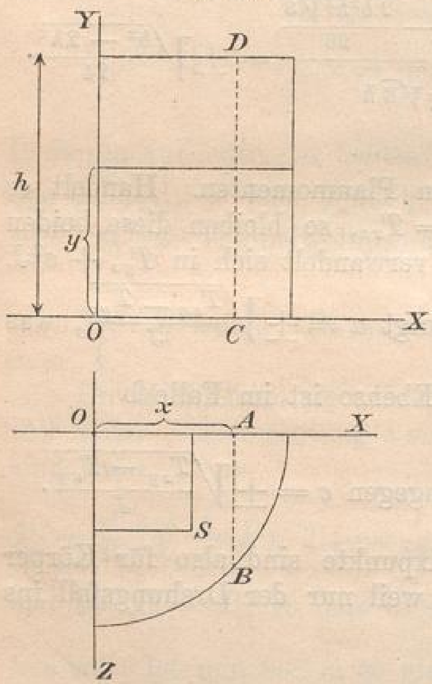
wird, so ergiebt sich dieselbe Berechnungsmethode, wie bei Fig. 122, und es wird

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 + p_1 p_2$$

bezw.

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 + p_1 p_2.$$

Fig. 280.



403) Einige Beispiele von Centrifugalmomenten.

Quadrant des Kreiscylinders. In der Lage der Figur ist die Schicht in der Höhe y gleich $\frac{r^2\pi}{4}$, ihr Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{4r}{3\pi}$, das entsprechende Moment also $\frac{r^2\pi}{4} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{r^3}{3}$, das Centrifugalmoment in Bezug auf die Grundebene also $\frac{r^3}{3} y$. Für den Körper von Höhe h erhält man also

$$\sum mxy = \frac{r^3}{3}\frac{h^2}{2} = \frac{r^3 h^2}{6}.$$

Ebenso grofs ist $\sum myz$. Dagegen ist $\sum mzx$ folgendermafsen zu berechnen. Die Schicht im Abstande x ist gleich

$$AB \cdot CD = h\sqrt{r^2 - x^2},$$

der Schwerpunktsabstand von der Ebene XY ist $\frac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2}$, das entsprechende Moment also $\frac{h}{2}(r^2 - x^2)$. Dies mit dem Abstande x multipliziert giebt $\frac{h}{2} r^2 x - \frac{h}{2} x^3$. Für den ganzen Körper von 0 bis r entsteht $\frac{h}{2} r^2 \frac{r^2}{2} - \frac{h}{2}\frac{r^4}{4} = \frac{hr^4}{8}$. Die Verlegung nach dem Schwerpunkte des Körpers hin bietet keine Schwierigkeit.

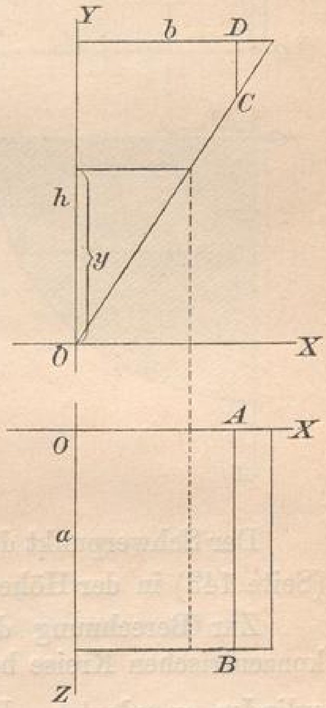
404) Dreieckskörper. Schicht in Höhe y ist $a\frac{b}{h}y$, Schwerpunktsabstand von Ebene YZ ist $\frac{1}{2}\frac{b}{h}y$, das entsprechende Moment also $\frac{ab^2}{2h^2}y^2$, das Centrifugalmoment für die Grundebene also $\frac{ab^2}{2h^2}y^3$. Für den ganzen Körper von 0 bis h entsteht also

$$\sum mxy = \frac{ab^2}{2h^2}\frac{h^4}{4} = \frac{ab^2h^2}{8}.$$

Die Schicht $a\frac{b}{h}y$ hat von der Ebene XY den Schwerpunktsabstand $\frac{a}{2}$ und das statische Moment $\frac{a^2b}{2h}y$, dies mit y multipliziert, giebt für die Grundebene des Centrifugalmoment $\frac{a^2b}{2h}y^2$. Für den ganzen Körper wird

$$\sum myz = \frac{a^2b}{2h}\frac{h^3}{3} = \frac{a^2bh^2}{6}.$$

Fig. 281.



Im Abstande x hat man die Schicht

$$AB \cdot CD = a \cdot h\frac{b-x}{b} = ah - \frac{ah}{b}x.$$

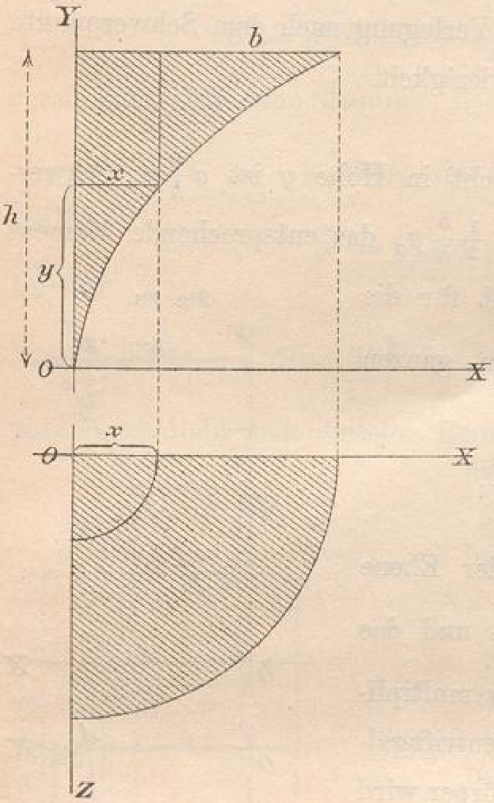
Ihr Abstand von der Ebene XY ist $\frac{a}{2}$, also das statische Moment $\frac{a^2}{2}h - \frac{a^2h}{2b}x$. Dies ist mit x zu multiplizieren und giebt das Centrifugalmoment $\frac{a^2}{2}hx - \frac{a^2h}{2b}x^2$. Für den ganzen Körper wird

$$\sum mzx = \frac{a^2h}{2}\frac{b^2}{2} - \frac{a^2h}{2b}\frac{b^3}{3} = \frac{a^2b^2h}{12}.$$

Die Verlegung nach dem Schwerpunkte hin macht keine Schwierigkeiten.

In ähnlicher Weise lassen sich parabolische Cylinder p^{ter} Ordnung und entsprechende Sektoren von Drehungsparaboloiden behandeln, auch kann man zu Drehungskörpern übergehen, deren Profilkurven Parabeln gemischter Ordnung angehören, z. B.:

Fig. 282.



405) Quadrant eines parabolischen Drehungskörpers.

In Höhe y ist $x = \frac{b}{h^2} y^2$, die Viertelkreisschicht ist also

$$\frac{x^2 \pi}{4} = \frac{b^2 y^4 \pi}{4 h^4},$$

sein Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{4x}{3x} = \frac{4by^2}{3\pi h^2}$, also das Moment

$$\sum mx = \frac{b^2 y^4 \pi}{4 h^4} \cdot \frac{4by^2}{3\pi h^2} = \frac{b^3 y^6}{3 h^6}.$$

Dies mit y multipliziert giebt $\frac{b^3 y^7}{3 h^6}$ als das Centrifugalmoment der Schicht in Bezug auf die Grundebene. Für den ganzen Körper wird

$$\sum mxy = \frac{b^3}{3 h^6} \frac{h^8}{8} = \frac{b^3 h^2}{24}.$$

Der Schwerpunkt des Körpers liegt nach der parabolischen Tabelle (Seite 143) in der Höhe $y_s = \frac{5}{6} h$, wie der des vollständigen Körpers.

Zur Berechnung des andern Abstandes kann die Methode der konzentrischen Kreise benutzt werden. In Fig. 282 ist einer der Teilcylinder angedeutet. Ist x sein Radius, so ist die Grundlinie $\frac{x\pi}{2}$, die Höhe $h - y = h - \frac{h}{\sqrt{b}} \sqrt{x}$, also die Mantelfläche

$$\frac{x\pi}{2} h - \frac{x\pi}{2} \frac{h}{\sqrt{b}} \sqrt{x} = \frac{\pi h}{2} x - \frac{\pi h}{2\sqrt{b}} x^{\frac{3}{2}}.$$

Sein Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{2x}{\pi}$, also das statische Moment in Bezug auf diese

$$\frac{2x}{\pi}\frac{\pi h}{2}x - \frac{2x}{\pi}\frac{\pi h}{2\sqrt{b}}x^{\frac{3}{2}} = hx^2 - \frac{h}{\sqrt{b}}x^{\frac{5}{2}}.$$

Läfst man die Radien von 0 bis b wachsen, so erhält man das statische Gesamtmoment des Körpers als

$$h\frac{b^3}{3} - \frac{h}{b^{\frac{1}{2}}}\frac{b^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{7}\right)hb^3 = \tfrac{1}{21}hb^3.$$

Dividiert man dies durch den Körperinhalt $\frac{1}{4}\cdot b^2\pi\frac{h}{5} = \frac{b^2\pi h}{20}$, so folgt als Schwerpunktsabstand $x_s = \frac{20\,b}{21\,\pi}$. Verlegt man endlich das Centrifugalmoment $\frac{b^3h^2}{24}$ nach dem Schwerpunkte, so ist abzuziehen

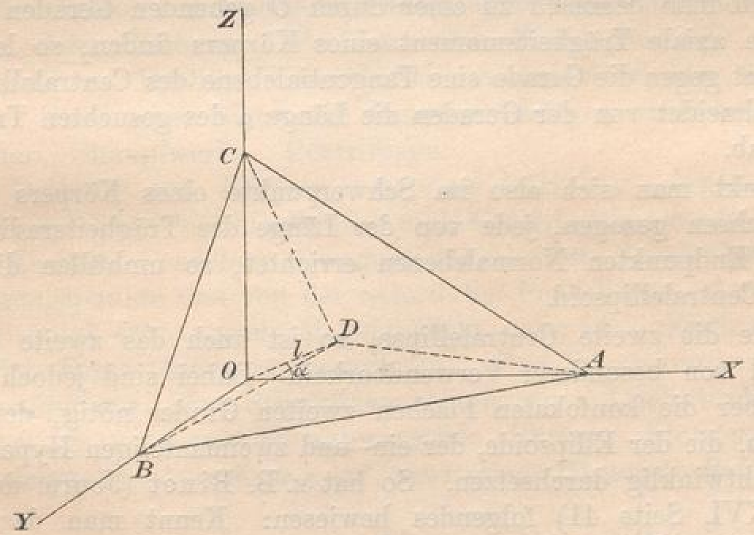
$$x_s\cdot y_s J = \frac{20\,b}{21\,\pi}\cdot\frac{5\,h}{6}\cdot\frac{b^2\pi h}{20} = \tfrac{5}{126}b^3h^2,$$

so dafs man hat $\frac{b^3h^2}{504}$.

406) Das zweite Centralellipsoid.

Bildet man ein Centralellipsoid, dessen Hauptachsen nicht die

Fig. 283.



reciproken Werte der Radien a, b, c, sondern diese selbst sind, so ist seine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Die Tangentialebene ABC in Figur 283, die sich in einem Punkte

x, y, z der Fläche an diese legen läfst, hat, wie leicht zu zeigen ist, die Gleichung

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} + \frac{z z_1}{c^2} = 1.$$

Setzt man y und z gleich Null, so folgt für A der Abstand $OA = x = \frac{a^2}{x_1}$. Ist OD das Lot vom Nullpunkte auf die Fläche, so wird für dessen Winkel mit der X-Achse $\frac{l}{x} = \frac{l x_1}{a^2} = \cos\alpha$. Ebenso $\cos\beta = \frac{l y_1}{b^2}$, $\cos\gamma = \frac{l z_1}{c^2}$. Daraus kann man bilden

$$a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma = l^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2}\right) = l^2,$$

denn weil der gegebene Punkt auf der Fläche des Ellipsoides liegt, ist die letzte Klammer gleich 1. Nach Abschnitt 385 ist aber der Ausdruck links, wenn man wie hier von den Hauptachsen des Centralellipsoides ausgegangen ist, gleich dem Werte des Trägheitsradius für die Achse mit den Winkeln α, β, γ.

Das von Clebsch eingeführte und von Culmann vielfach benutzte zweite Centralellipsoid hat also die Eigenschaft, dafs die Lote vom Nullpunkte auf die Tangentialebenen den Längen der Trägheitsradien für die betreffenden Achsen entsprechen.

Will man demnach zu einer durch O gehenden Geraden das zugehörige axiale Trägheitsmoment eines Körpers finden, so lege man senkrecht gegen die Gerade eine Tangentialebene des Centralellipsoides, diese schneidet von der Geraden die Länge ϱ des gesuchten Trägheitsradius ab.

Denkt man sich also im Schwerpunkte eines Körpers beliebig viele Achsen gezogen, jede von der Länge des Trägheitsradius, und in den Endpunkten Normalebenen errichtet, so umhüllen diese das zweite Centralellipsoid.

Wie die zweite Centralellipse, so ist auch das zweite Centralellipsoid von besonderer Verwendbarkeit. Dabei sind jedoch Kenntnisse über die konfokalen Flächen zweiten Grades nötig, deren drei Gruppen, die der Ellipsoide, der ein- und zweimanteligen Hyperboloide sich rechtwinklig durchsetzen. So hat z. B. Binet (Journ. de l'école polyt. XVI, Seite 41) folgendes bewiesen: Kennt man das zweite Centralellipsoid eines Körpers und sucht man die Richtung der Hauptachsen für einen beliebigen Raumpunkt, so braucht man nur für die drei zum Centralellipsoid konfokalen Flächen, die durch den Punkt gelegt werden können, in diesem die Normalen zu errichten, wodurch man die gesuchten Achsenrichtungen hat. Auch die Längen lassen sich leicht berechnen.

Man vergleiche hierzu die in den Vorbemerkungen besprochene Abhandlung von Clebsch und den betreffenden Abschnitt in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik, z. B. bei Schell, ebenso in der Graphischen Statik von Culmann.

Hier ist das zweite Ellipsoid nur der Vollständigkeit wegen genannt.

407) Bemerkungen zur Methode von Reye. Reye hat in Schlömilchs Zeitschrift, Band X, Seite 432 u. s. f. gezeigt, wie man für die Zwecke der Mechanik einen Körper durch einen Massenpunkt ersetzen kann, ähnlich wie in Abschnitt VII F die ebene Fläche durch drei Punkte ersetzt wurde. Auch auf diese ziemlich viel Vorkenntnisse beanspruchenden Dinge soll hier nur hingewiesen werden, da sie über den elementaren Zweck dieses Buches hinausgehen.

408) Anwendbarkeit der Lehre von den körperlichen Trägheits- und Centrifugalmomenten.

a) Berechnung der Energie von Körpern, die sich um eine feste Schwerpunktsachse drehen. Wucht von Schwungrädern, Mühl- und Schleifsteinen. Einfluſs der Schwungmassen auf plötzlich festgeklemmte Wellen oder Achsen. Arbeitsleistung, Überwindung von Reibungswiderständen in Folge der Wucht. Beschleunigte Drehung um solche Achsen. Atwoodsche Fallmaschine ohne und mit Berücksichtigung der Reibung. Probleme der Fadenspannung. — Das Schwungrad als Egalisator der Maschinen bei einer oder mehreren Kurbeln. Stoſs gegen einen sich drehenden Körper, unelastischer und elastischer. Stampfwerke. Centrifugen.

b) Drehung von Körpern um eine beliebige feste Achse. Einwirkung der Centrifugalkräfte und Centrifugalmomente auf die Achse. Energie. Pendelnde Bewegung um eine feste Achse. Lehre vom Schwingungspunkte und von der reduzierten Pendellänge. Anwendung auf horizontal schwingende Magnetnadeln unter dem Einflusse einer richtenden Kraft (Intensitätsmessungen). Das Reversionspendel und die Bestimmung der Schwerebeschleunigung. Unelastischer und elastischer Stoſs gegen so schwingende Körper. Stoſspunkt und Stoſsmittelpunkt. Anwendung auf schwingende Hämmer. Ballistisches Pendel.

c) Berechnung der Energie von Körpern, die sich fortschreitend und drehend bewegen. Herabrollen auf schiefer Ebene unter Berücksichtigung des Widerstandes gegen das Drehen. Beschleunigtes Rollen auf horizontaler Ebene. Verlangsamtes Fallen beim Abwickeln umgeschlungener Fäden von der Achse. Anwendungen der Fadenspannung auf die Reibungstheorie. Grenzwinkel für das alleinige

Rollen auf schiefer Ebene. Rollen und Gleiten zugleich, sowohl auf schiefer als auch auf horizontaler Ebene. Fälle des Hinaufrollens auf schiefer Ebene, sowohl bei geradliniger, als auch bei parabolischer Bahn. Bewegung auf krummer Fläche.

d) Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt. Sphärische Schwingungen des um einen festen Punkt schwingenden physischen Pendels. Gewisse Fälle des Foucaultschen Pendels. Theorie des Fesselschen Apparates und des Kreisels. Anwendungen auf Präcession und Nutation. Unelastischer und elastischer Stofs gegen solche Körper.

e) Drehungsbewegung freier Körper. Freie Drehungsachsen (Hauptachsen des Trägheitsellipsoides). Drehung um ganz beliebige Achsen. Unelastischer und elastischer Stofs gegen solche Körper. Freiwillige Drehungsachse für den ersten Augenblick. Parabolischer Wurf bei gleichzeitigem Drehen. Bewegung und Drehung der Himmelskörper. Bewegung und Drehung im widerstehenden Mittel. Ballistik der Geschosse.

f) Allgemeine Pendelbewegungen beliebig gestalteter Körper auf der Ebene. Herabrollen solcher Körper auf der schiefen Ebene oder auf krummen Flächen. Allgemeine Pendelbewegungen schwimmender Körper, z. B. Schwankungen der Schiffe.