Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

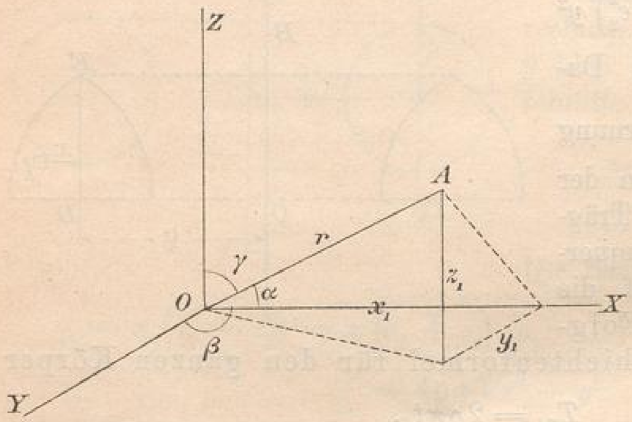
Hülfsaufgaben.

G. Der Drehungssatz für die Trägheitsachsen.

Einige Hülfsaufgaben der Raumgeometrie werden vorausgeschickt.

377) **Aufgabe.** Eine Gerade OA bilde mit der X-Achse und Y-Achse die Winkel α und β. Welchen Winkel γ bildet sie mit der Z-Achse?

Fig. 275.



Auflösung. Sind x_1, y_1, z_1 die Koordinaten von A, so ist

$$x_1 = r\cos\alpha,$$
$$y_1 = r\cos\beta,$$
$$z_1 = r\cos\gamma,$$

aus

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2$$

folgt also

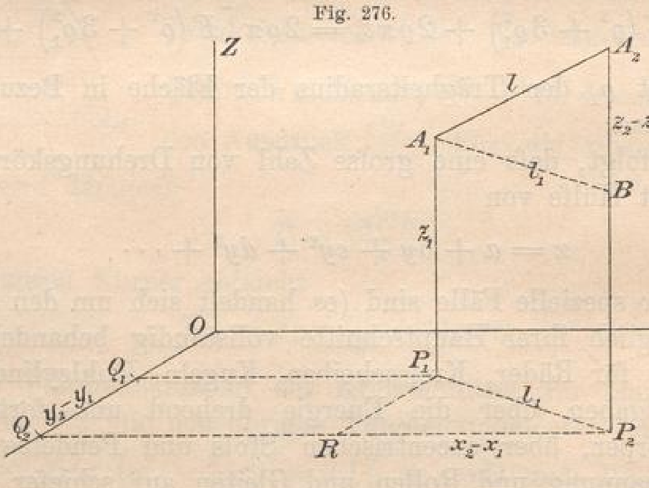
$$r^2\cos^2\alpha + r^2\cos^2\beta + r^2\cos^2\gamma = r^2, \text{ oder } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Demnach bestimmt sich γ aus

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

379) **Aufgabe.** Die Punkte A_1 und A_2 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 seien gegeben. Wie grofs ist ihre gegenseitige Entfernung?

Fig. 276.



Auflösung. P_1 und P_2 seien die Projektionen der Punkte A_1 und A_2 auf die Grundebene, Q_1 und Q_2 die von P_1 und P_2 auf die Y-Achse, ferner sei $P_1R \parallel Q_1Q_2$, $A_1B \parallel P_1P_2$, dann ist

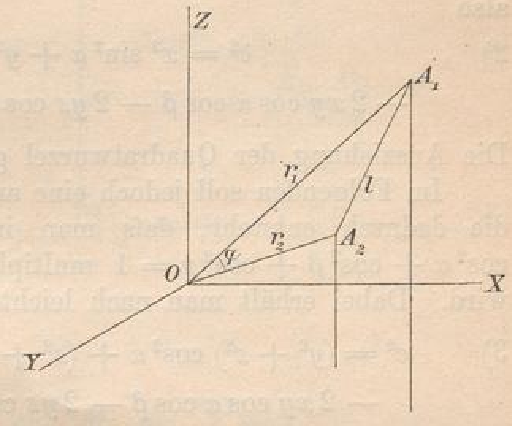
$$l_2 = l_1^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

also

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

380) **Aufgabe.** Eine Gerade OA_1 bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel α_1, β_1 und γ_1, eine andere Gerade OA_2 die Winkel α_2, β_2 und γ_2. Der Schnittwinkel ϱ der beiden Geraden soll berechnet werden.

Fig. 277.



Auflösung. Der Cosinussatz giebt

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\, r_1 r_2 \cos\varphi,$$

so dafs

$$2\, r_1 r_2 \cos\varphi = r_1^2 + r_2^2 - l^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$
$$- [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2] = 2\, x_1 x_2 + 2\, y_1 y_2 + 2\, z_1 z_2.$$

Folglich ist

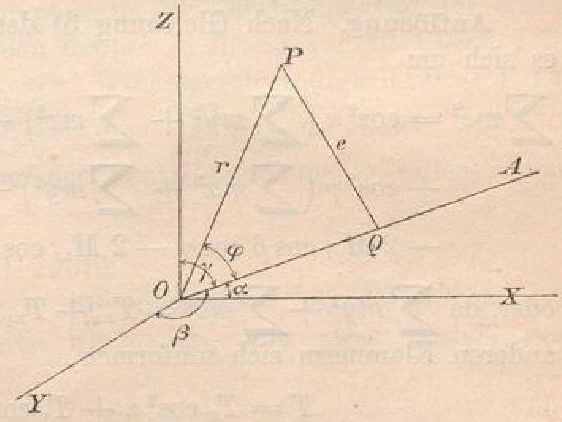
$$\cos\varphi = \frac{x_1}{r_1}\frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1}\frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1}\frac{z_2}{r_2},$$

oder

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2$$
$$+ \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2.$$

381) **Aufgabe.** Wie grofs ist die Entfernung e eines Punktes x, y, z von einer Geraden OA, die mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet?

Fig. 278.



Auflösung. P sei der gegebene Punkt, Q seine Projektion auf die Gerade, $OP = r$ bilde mit den Achsen die Winkel ξ, η, ϑ, dann ist

$$e^2 = r^2 - OQ^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (r\cos\varphi)^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - r^2(\cos\alpha\cos\xi + \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\zeta)^2,$$

also, da $r\cos\xi = x$, $r\cos\eta = y$, $r\cos\zeta = z$ ist,

1) $$e^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 \cos^2\alpha + y^2 \cos^2\beta + z^2 \cos^2\gamma)$$
$$- 2\,xy \cos\alpha \cos\beta - 2\,yz \cos\beta \cos\eta - 2\,zx \cos\gamma \cos\alpha$$

oder
$$e^2 = x^2 (1 - \cos^2\alpha) + y^2 (1 - \cos^2\beta) + z^2 (1 - \cos^2\gamma)$$
$$- 2\,xy \cos\alpha \cos\beta - 2\,yz \cos\beta \cos\gamma - 2\,zx \cos\gamma \cos\alpha,$$

also

2) $$e^2 = x^2 \sin^2\alpha + y^2 \sin^2\beta + z^2 \sin^2\gamma$$
$$- 2\,xy \cos\alpha \cos\beta - 2\,yz \cos\beta \cos\gamma - 2\,zx \cos\gamma \cos\alpha.$$

Die Ausziehung der Quadratwurzel giebt e.

Im Folgenden soll jedoch eine andere Formel angewendet werden, die dadurch entsteht, daſs man in Formel 1) die Klammer mit $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ multipliziert, wodurch nichts geändert wird. Dabei erhält man nach leichter Umformung

3) $$e^2 = (y^2 + z^2) \cos^2\alpha + (z^2 + x^2) \cos^2\beta + (x^2 + y^2) \cos^2\gamma$$
$$- 2\,xy \cos\alpha \cos\beta - 2\,yz \cos\beta \cos\gamma - 2\,zx \cos\gamma \cos\alpha.$$

382) **Aufgabe.** Die axialen Trägheits- und Centrifugalmomente eines Körpers in Bezug auf ein Koordinatensystem seien bekannt. Wie groſs ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse OA, die mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β und γ bildet?

Auflösung. Nach Gleichung 3) des vorigen Abschnittes handelt es sich um

$$\sum m e^2 = \cos^2\alpha \left(\sum m y^2 + \sum m z^2\right) + \cos^2\beta \left(\sum m z^2 + \sum m x^2\right)$$
$$+ \cos^2\gamma \left(\sum m x^2 + \sum m y^2\right) - 2\,M_{xy} \cos\alpha \cos\beta$$
$$- 2\,M_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2\,M_{zx} \cos\gamma \cos\alpha,$$

oder, da $\sum m y^2 + \sum m z^2 = T_{xz} + T_{xy} = T_x$ ist und entsprechend die anderen Klammern sich umformen,

1) $$T = T_x \cos^2\alpha + T_y \cos^2\beta + T_z \cos^2\gamma$$
$$- 2\,M_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2\,M_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2\,M_{zx} \cos\gamma \cos\alpha.$$

Das gesuchte Trägheitsmoment kann also mit Hülfe der Axialmomente und der Centrifugalmomente leicht bestimmt werden.

383) Bedeutung der Centrifugalmomente. Ein Körper drehe sich um die Z-Achse, und P sei die momentane Lage eines Körperteilchens, dessen Entfernung von der Drehungsachse gleich e