Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Trägheitsmoment für beliebig gerichtete Achsen.

$$1)\qquad e^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x^2\cos^2\alpha + y^2\cos^2\beta + z^2\cos^2\gamma)$$
$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\eta - 2zx\cos\gamma\cos\alpha$$

oder

$$e^2 = x^2(1 - \cos^2\alpha) + y^2(1 - \cos^2\beta) + z^2(1 - \cos^2\gamma)$$
$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha,$$

also

$$2)\qquad e^2 = x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta + z^2\sin^2\gamma$$
$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha.$$

Die Ausziehung der Quadratwurzel giebt e.

Im Folgenden soll jedoch eine andere Formel angewendet werden, die dadurch entsteht, daſs man in Formel 1) die Klammer mit $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ multipliziert, wodurch nichts geändert wird. Dabei erhält man nach leichter Umformung

$$3)\qquad e^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma$$
$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha.$$

382) **Aufgabe.** Die axialen Trägheits- und Centrifugalmomente eines Körpers in Bezug auf ein Koordinatensystem seien bekannt. Wie groſs ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse OA, die mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β und γ bildet?

Auflösung. Nach Gleichung 3) des vorigen Abschnittes handelt es sich um

$$\sum me^2 = \cos^2\alpha\left(\sum my^2 + \sum mz^2\right) + \cos^2\beta\left(\sum mz^2 + \sum mx^2\right)$$
$$+ \cos^2\gamma\left(\sum mx^2 + \sum my^2\right) - 2M_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$
$$- 2M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha,$$

oder, da $\sum my^2 + \sum mz^2 = T_{xz} + T_{xy} = T_x$ ist und entsprechend die anderen Klammern sich umformen,

$$1)\qquad T = T_x\cos^2\alpha + T_y\cos^2\beta + T_z\cos^2\gamma$$
$$- 2M_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.$$

Das gesuchte Trägheitsmoment kann also mit Hülfe der Axialmomente und der Centrifugalmomente leicht bestimmt werden.

383) Bedeutung der Centrifugalmomente. Ein Körper drehe sich um die Z-Achse, und P sei die momentane Lage eines Körperteilchens, dessen Entfernung von der Drehungsachse gleich e