Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Bedeutung des Centrifugalmoments.

1) $$e^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x^2 \cos^2 \alpha + y^2 \cos^2 \beta + z^2 \cos^2 \gamma)$$
$$- 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \eta - 2zx \cos \gamma \cos \alpha$$

oder

$$e^2 = x^2 (1 - \cos^2 \alpha) + y^2 (1 - \cos^2 \beta) + z^2 (1 - \cos^2 \gamma)$$
$$- 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha,$$

also

2) $$e^2 = x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta + z^2 \sin^2 \gamma$$
$$- 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha.$$

Die Ausziehung der Quadratwurzel giebt e.

Im Folgenden soll jedoch eine andere Formel angewendet werden, die dadurch entsteht, daſs man in Formel 1) die Klammer mit $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ multipliziert, wodurch nichts geändert wird. Dabei erhält man nach leichter Umformung

3) $$e^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma$$
$$- 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha.$$

382) **Aufgabe.** Die axialen Trägheits- und Centrifugalmomente eines Körpers in Bezug auf ein Koordinatensystem seien bekannt. Wie groſs ist sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine Achse OA, die mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β und γ bildet?

Auflösung. Nach Gleichung 3) des vorigen Abschnittes handelt es sich um

$$\sum me^2 = \cos^2 \alpha \left(\sum my^2 + \sum mz^2\right) + \cos^2 \beta \left(\sum mz^2 + \sum mx^2\right)$$
$$+ \cos^2 \gamma \left(\sum mx^2 + \sum my^2\right) - 2 M_{xy} \cos \alpha \cos \beta$$
$$- 2 M_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 M_{zx} \cos \gamma \cos \alpha,$$

oder, da $\sum my^2 + \sum mz^2 = T_{xz} + T_{xy} = T_x$ ist und entsprechend die anderen Klammern sich umformen,

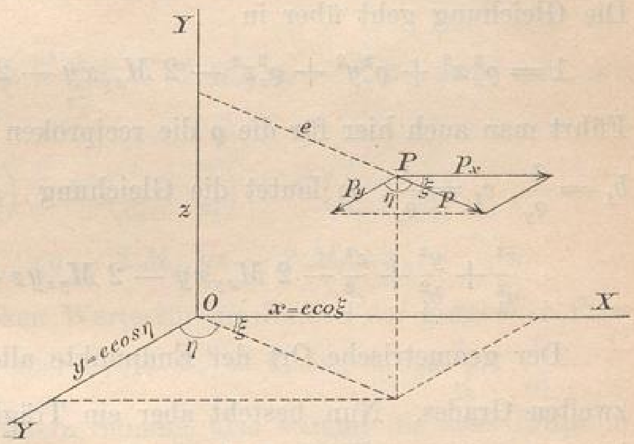
1) $$T = T_x \cos^2 \alpha + T_y \cos^2 \beta + T_z \cos^2 \gamma$$
$$- 2 M_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2 M_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 M_{zx} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Das gesuchte Trägheitsmoment kann also mit Hülfe der Axialmomente und der Centrifugalmomente leicht bestimmt werden.

383) Bedeutung der Centrifugalmomente. Ein Körper drehe sich um die Z-Achse, und P sei die momentane Lage eines Körperteilchens, dessen Entfernung von der Drehungsachse gleich e

sein möge. Ist ϑ die Winkelgeschwindigkeit, so entsteht die Centrifugalkraft $p = me\vartheta^2$, die in den Richtungen der Koordinatenachsen die Komponenten $p_x = me\vartheta^2 \cos\xi$ und $p_y = me\vartheta^2 \cos\eta$ hat, wofür man schreiben kann $p_x = mx\vartheta^2$, $p_y = my\vartheta^2$. Die statischen Momente dieser Komponenten in Bezug auf die Grundebene sind

Fig. 279.



$$\vartheta^2 \sum mzx$$

und

$$\vartheta^2 \sum myz.$$

Ist $\vartheta = 1$, so hat man

$$M_{xz} = \sum mxz \text{ und } M_{yz} = \sum myz,$$

wobei x und z, ebenso y und z ihre Rolle vertauschen können. Also: $\sum mxz = M_{xz}$ ist zu deuten als das Moment der X-Komponente der Centrifugalkraft für einen sich um die z-Achse drehenden Körper in Bezug auf die Ebene XY, oder es bedeutet das Moment der Z-Komponente der Centrifugalkraft für einen sich um die X-Achse drehenden Körper in Bezug auf die Ebene YZ. In beiden Fällen ist jedoch die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = 1$ zu setzen. Entsprechend sind $\sum myz$ und $\sum mzx$ zu deuten.

Beispiele für Berechnung der Centrifugalmomente sollen unten gegeben werden.

384) Das Trägheitsellipsoid.

Man führe in Gleichung 1) des Abschnittes 382 die Radien der Trägheitsmomente im früheren Sinne ein, und zwar mittels der Gleichungen

$$\varrho^2 J = T,\ \varrho_x^2 J = T_x,\ \varrho_y^2 J = T_y,\ \varrho_z^2 J = T_z,$$

dividiert man dann beiderseits durch J, so erhält man

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \cos\alpha + \varrho_y^2 \cos\beta + \varrho_z^2 \cos\gamma$$
$$- 2 M_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2 M_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2 M_{zx} \cos\gamma \cos\alpha.$$

Man berechne hieraus ϱ und trage den reciproken Wert $\frac{1}{\varrho}$ von O aus auf der Achse OA ab. Bezeichnet man die Koordinaten des