Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

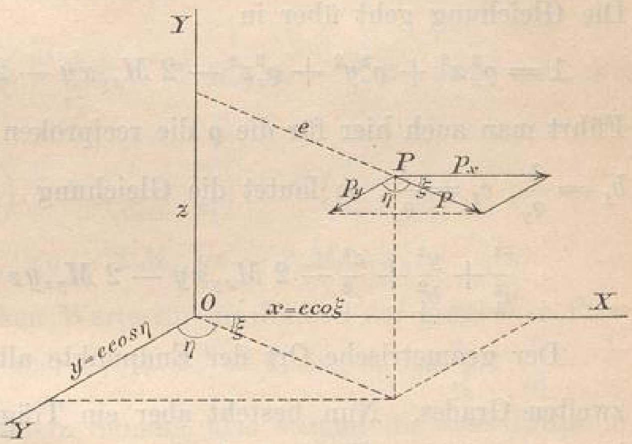
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Das Trägheitsellipsoid.

sein möge. Ist ϑ die Winkelgeschwindigkeit, so entsteht die Centrifugalkraft $p = me\vartheta^2$, die in den Richtungen der Koordinatenachsen die Komponenten $p_x = me\vartheta^2 \cos\xi$ und $p_y = me\vartheta^2 \cos\eta$ hat, wofür man schreiben kann $p_x = mx\vartheta^2$, $p_y = my\vartheta^2$. Die statischen Momente dieser Komponenten in Bezug auf die Grundebene sind

Fig. 279.



$$\vartheta^2 \sum mzx$$

und

$$\vartheta^2 \sum myz.$$

Ist $\vartheta = 1$, so hat man

$$M_{xz} = \sum mxz \text{ und } M_{yz} = \sum myz,$$

wobei x und z, ebenso y und z ihre Rolle vertauschen können. Also: $\sum mxz = M_{xz}$ ist zu deuten als das Moment der X-Komponente der Centrifugalkraft für einen sich um die z-Achse drehenden Körper in Bezug auf die Ebene XY, oder es bedeutet das Moment der Z-Komponente der Centrifugalkraft für einen sich um die X-Achse drehenden Körper in Bezug auf die Ebene YZ. In beiden Fällen ist jedoch die Winkelgeschwindigkeit $\vartheta = 1$ zu setzen. Entsprechend sind $\sum myz$ und $\sum mzx$ zu deuten.

Beispiele für Berechnung der Centrifugalmomente sollen unten gegeben werden.

384) Das Trägheitsellipsoid.

Man führe in Gleichung 1) des Abschnittes 382 die Radien der Trägheitsmomente im früheren Sinne ein, und zwar mittels der Gleichungen

$$\varrho^2 J = T, \ \varrho_x^2 J = T_x, \ \varrho_y^2 J = T_y, \ \varrho_z^2 J = T_z,$$

dividiert man dann beiderseits durch J, so erhält man

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \cos\alpha + \varrho_y^2 \cos\beta + \varrho_z^2 \cos\gamma$$
$$- 2\,M_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2\,M_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2\,M_{zx} \cos\gamma \cos\alpha.$$

Man berechne hieraus ϱ und trage den reciproken Wert $\frac{1}{\varrho}$ von O aus auf der Achse OA ab. Bezeichnet man die Koordinaten des

Endpunktes mit x, y, z, so dafs $\frac{1}{\varrho}\cos\alpha = x$, $\frac{1}{\varrho}\cos\beta = y$, $\frac{1}{\varrho}\cos\gamma = z$ ist, so kann man für sämtliche Cosinus ihre Werte $\cos\alpha = x\varrho$, $\cos\beta = y\varrho$, $\cos\gamma = z\varrho$ einsetzen, worauf sich beiderseits ϱ^2 weghebt. Die Gleichung geht über in

$$1 = \varrho_x^2 x^2 + \varrho_y^2 y^2 + \varrho_z^2 z^2 - 2\,M_{xy}xy - 2\,M_{yz}yz - 2\,M_{zx}zx.$$

Führt man auch hier für die ϱ die reciproken Werte ein, also $a_1 = \frac{1}{\varrho_x}$, $b_1 = \frac{1}{\varrho_y}$, $c_1 = \frac{1}{\varrho_z}$, so lautet die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} - 2\,M_{xy}xy - 2\,M_{yz}yz - 2\,M_{zx}zx = 1.$$

Der geometrische Ort der Endpunkte aller $\frac{1}{\varrho}$ ist also eine Fläche zweiten Grades. Nun besteht aber ein Trägheitsmoment $\sum mr^2$ aus lauter positiven Gliedern, kann also im allgemeinen nie Null sein. Kann aber ϱ nicht Null werden, so kann $\frac{1}{\varrho}$ nicht unendlich werden, d. h. die Fläche besitzt keine unendlich fernen Punkte, sie ist also ein Ellipsoid, aber nicht ein Paraboloid oder Hyperboloid. Sie heifst das Trägheitsellipsoid des Körpers für den Punkt O. Ist O der Schwerpunkt, so heifst die Fläche das Centralellipsoid des Körpers.

385) [Dasselbe Resultat hätte Gleichung 1) des Abschnittes 381 gegeben. Man hätte erhalten

$$\sum me^2 = \sum mx^2 \sin^2\alpha + \sum my^2 \sin^2\beta + \sum mz^2 \sin^2\gamma$$
$$- 2M_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2\,M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2\,M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$

oder

$$1)\qquad T = T_{yz}\sin^2\alpha + T_{zx}\sin^2\beta + T_{xy}\sin^2\gamma$$
$$- 2\,M_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2\,M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2\,M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha,$$

so dafs man das Axialmoment T auch mit Hülfe der Planmomente berechnen kann. Führt man die Trägheitsradien ein, so ergiebt sich

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}\sin^2\alpha + \varrho_{zx}\sin^2\beta + \varrho_{xy}\sin^2\gamma - 2\,M_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$
$$- 2\,M_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2\,M_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.$$

Berechnet man hieraus ϱ für jede Achse und trägt man den reciproken Wert $\frac{1}{\varrho}$ ein, so mufs man dieselbe Fläche erhalten, wie vorher. Hier giebt aber $\frac{1}{\varrho}\sin\alpha$ nicht eine Koordinate x, sondern den Abstand von der X-Achse, dessen Quadrat gleich y^2+z^2 ist. Ebenso ist es mit den andern Gröfsen. Nach beiderseitiger Division durch ϱ erhält man

$$1=\frac{y^2+z^2}{a_2^2}+\frac{z^2+x^2}{b_2^2}+\frac{x^2+y^2}{c_2^2}-2\,M_{xy}\,xy-2\,M_{yz}\,yz-2\,M_{zx}\,zx,$$

oder

$$x^2\left(\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{c_2^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{c_2^2}+\frac{1}{a_2^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{b_2^2}\right)$$
$$-2\,M_{xy}\,xy-2\,M_{yz}\,yz-2\,M_{zx}\,zx,$$

wo a_2, b_2, c_2 die reciproken Werte für die Radien der gegebenen Planmomente bedeuten. Da aber $T_{xy}+T_{yz}=T_y$ ist, so ist $\frac{1}{c_2^2}+\frac{1}{a_2^2}=\frac{1}{b_2^2}$, ebenso ist es mit der andern Summe, also stimmt die neue Ellipsoidgleichung mit der früheren überein.]

386) Jedes Ellipsoid hat aber drei Hauptachsen a, b, c, für die seine Gleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Hier fehlen die Teile $-2\,M_{xy}\,xy-2\,M_{yz}\,yz-2\,M_{zx}\,zx$, also müssen für die Hauptachsen als Koordinatenachsen die Centrifugalmomente gleich Null sein. Dies gilt von den Hauptachsen für jedes Trägheitsellipsoid eines Körpers.

Geht man also von den Hauptachsen eines solchen aus, so vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung für ein Trägheitsmoment zu folgender Gestalt:

$$T=T_x\cos^2\alpha+T_y\cos^2\beta+T_z\cos^2\gamma.$$

387) **Aufgabe.** Gegeben seien drei Trägheitsmomente T_1 in Bezug auf drei beliebige Achsen durch O, die mit den Hauptachsen die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bilden. Die Momente für die Hauptachsen sollen bestimmt werden.

Auflösung. Man stelle folgende Gleichungen auf:

$$T_x\cos^2\alpha_1+T_y\cos^2\beta_1+T_z\cos^2\gamma_1=T_1,$$
$$T_x\cos^2\alpha_2+T_y\cos^2\beta_2+T_z\cos^2\gamma_2=T_2,$$
$$T_x\cos^2\alpha_3+T_y\cos^2\beta_3+T_z\cos^2\gamma_3=T_3.$$

Sie sind in Bezug auf die gesuchten T vom ersten Grade, lassen sich also leicht auflösen.