Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Bestimmung der Hauptachsen aus gegebenen Momenten.

giebt aber $\frac{1}{\varrho}\sin\alpha$ nicht eine Koordinate x, sondern den Abstand von der X-Achse, dessen Quadrat gleich $y^2 + z^2$ ist. Ebenso ist es mit den andern Gröfsen. Nach beiderseitiger Division durch ϱ erhält man

$$1 = \frac{y^2+z^2}{a_2^2} + \frac{z^2+x^2}{b_2^2} + \frac{x^2+y^2}{c_2^2} - 2\,M_{xy}\,xy - 2\,M_{yz}\,yz - 2\,M_{zx}\,zx,$$

oder

$$x^2\left(\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{c_2^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{c_2^2}+\frac{1}{a_2^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{b_2^2}\right)$$
$$- 2\,M_{xy}\,xy - 2\,M_{yz}\,yz - 2\,M_{zx}\,zx,$$

wo a_2, b_2, c_2 die reciproken Werte für die Radien der gegebenen Planmomente bedeuten. Da aber $T_{xy} + T_{yz} = T_y$ ist, so ist $\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{a_2^2} = \frac{1}{b_2^2}$, ebenso ist es mit der andern Summe, also stimmt die neue Ellipsoidgleichung mit der früheren überein.]

386) Jedes Ellipsoid hat aber drei Hauptachsen a, b, c, für die seine Gleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hier fehlen die Teile $-2\,M_{xy}\,xy - 2\,M_{yz}\,yz - 2\,M_{zx}\,zx$, also müssen für die Hauptachsen als Koordinatenachsen die Centrifugalmomente gleich Null sein. Dies gilt von den Hauptachsen für jedes Trägheitsellipsoid eines Körpers.

Geht man also von den Hauptachsen eines solchen aus, so vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung für ein Trägheitsmoment zu folgender Gestalt:

$$T = T_x \cos^2\alpha + T_y \cos^2\beta + T_z \cos^2\gamma.$$

387) **Aufgabe.** Gegeben seien drei Trägheitsmomente T_1 in Bezug auf drei beliebige Achsen durch O, die mit den Hauptachsen die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bilden. Die Momente für die Hauptachsen sollen bestimmt werden.

Auflösung. Man stelle folgende Gleichungen auf:

$$T_x \cos^2\alpha_1 + T_y \cos^2\beta_1 + T_z \cos^2\gamma_1 = T_1,$$
$$T_x \cos^2\alpha_2 + T_y \cos^2\beta_2 + T_z \cos^2\gamma_2 = T_2,$$
$$T_x \cos^2\alpha_3 + T_y \cos^2\beta_3 + T_z \cos^2\gamma_3 = T_3.$$

Sie sind in Bezug auf die gesuchten T vom ersten Grade, lassen sich also leicht auflösen.