# Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Beziehungen zwischen Plan-, Axial- und Polarmomenten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

c) Es war für beliebig gerichtete Koordinaten durch einen beliebigen Punkt für den gegebenen Körper

$$T_{xy} + T_{yz} = T_y, \quad T_{yz} + T_{zx} = T_z, \quad T_{zx} + T_{xy} = T_x,$$
$$T_{xy} + T_{yz} + T_{zx} = T_p,$$

folglich ist

$$T_x + T_y + T_z = 2\,(T_{xz} + T_{yx} + T_{zx}) = 2\,T_p$$

und

$$T_p = T_y + T_{zx} = T_z + T_{xy} = T_z + T_{yz}.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch schreiben als folgende

$$\varrho_{xy}^2 + \varrho_{yz}^2 = \varrho_y^2, \quad \varrho_{yz}^2 + \varrho_{zx}^2 = \varrho_z^2, \quad \varrho_{zx}^2 + \varrho_{xy}^2 = \varrho_x^2,$$
$$\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2 = 2\,(\varrho_{xy}^2 + \varrho_{yz}^2 + \varrho_{zx}^2) = 2\,\varrho_p^2,$$
$$\varrho_p^2 = \varrho_y^2 + \varrho_{zx}^2 = \varrho_z^2 + \varrho_{xy}^2 = \varrho_z^2 + \varrho_{yz}^2.$$

Die polaren, axialen und planen Trägheitsmomente hängen also einfach zusammen, und die verschiedenen Arten von Trägheitsradien lassen sich durch Pythagoreische Addition oder Subtraktion aus einander ableiten.

d) **Aufgabe.** Die Trägheitsradien $\varrho_x$, $\varrho_y$, $\varrho_z$ seien bekannt, wie findet man alle übrigen mit diesen Achsen zusammenhängenden Trägheitsradien?

**Auflösung.** $\varrho_p = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2}}, \quad \varrho_{xy} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_z^2},$

$$\varrho_{yz} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_x^2}, \quad \varrho_{zx} = \sqrt{\varrho_p^2 - \varrho_y^2}.$$

e) Aus $\varrho_x^2 + \varrho_y^2 + \varrho_z^2 = 2\,\varrho_p^2$ folgt der Satz: Die Summe der Trägheitsmomente für je drei auf einander senkrechte Achsen ist eine konstante Gröſse, nämlich gleich dem doppelten Quadrate des polaren Trägheitsmomentes.

Daraus folgt der geometrische Satz:

Die Summe der Quadrate der reciproken Werte je dreier auf einander senkrechter Halbmesser des Ellipsoides ist eine konstante Gröſse, und zwar gleich $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

f) Ist ferner der Satz bekannt, daſs die Summe der Quadrate je dreier konjugierter Halbmesser des Ellipsoides konstant ist, so kann man für die entsprechenden axialen Trägheitsmomente folgern, daſs die Summe ihrer reciproken Werte konstant sei, nämlich gleich $\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} + \frac{1}{T_c}$.

391) **Satz.** Legt man durch einen Punkt einer der Hauptachsen des Centralellipsoides Parallele zu den beiden andern Hauptachsen, so hat man für den Punkt die Richtungen der drei Hauptachsen des zugehörigen Trägheitsellipsoides.

**Beweis.** Wird der Punkt $x = a$ auf der $X$-Achse zur Untersuchung genommen, so handelt es sich in Bezug auf diesen um die neuen Koordinaten $\xi = (x - a)$, $\eta = y$, $\zeta = z$. Die Centrifugalmomente für das neue Koordinatensystem sind also 1) $\sum m\xi\eta = \sum m(x-a)z = \sum mxy - \sum may = \sum mxy - aJy_s = 0$, denn $\sum mxy$ war im alten Systeme gleich Null, da es sich um die Hauptachse des Centralellipsoides handelte, und der Schwerpunktsabstand $y_s$ ist gleich Null, denn er liegt im Mittelpunkte des Centralellipsoides.

2) $\sum m\eta\zeta = \sum myz = 0$ aus entsprechendem Grunde.

3) $\sum m\zeta\xi = \sum mz(x-a) = \sum mxz - \sum maz = \sum mxz - aJz_s = 0$, ähnlich wie vorher.

392) Verschiebungssatz für das Centrifugalmoment.

Verschiebt man den Nullpunkt des Koordinatensystems um $-a$, $-b$, $-c$ vom Schwerpunkte weg, so werden die Centrifugalmomente $M_{xy}$, $M_{yz}$, $M_{zx}$ in $M_{xy} + abJ$, $M_{yz} + bcJ$, $M_{xz} + caJ$ verwandelt.

**Beweis.** $\sum mxy$ geht über in $\sum m(x+a)(y+b) = \sum mxy + a\sum my + b\sum mx + ab\sum m$.

Dabei ist $\sum my = 0$ und $\sum mz = 0$, weil es sich um den Schwerpunkt als Nullpunkt des Koordinatensystems handelt. Es bleibt übrig

$$M_{x_1 y_1} = M_{xy} + abJ.$$

Ebenso ist es bei den beiden andern Momenten.

393) Ist in $M_{xy} + abJ$ eine der beiden Koordinaten $a$, $b$ gleich Null, so ist der Zusatz Null. Folglich:

Verschiebt man das Centrifugalmoment auf einer Schwerpunktsachse, so bleibt es ungeändert.

Ist die Schwerpunktsachse nun Hauptachse des Centralellipsoides, so bleibt der Wert des Centrifugalmomentes gleich Null, wenn man es auf dieser verschiebt.

394) **Anwendung.** Für den Schwerpunkt der Kugel sind in Bezug auf beliebig gerichtete Koordinatenachsen $x$, $y$, $z$ die Centri-