Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Verschiebungssätze.

391) **Satz.** Legt man durch einen Punkt einer der Hauptachsen des Centralellipsoides Parallele zu den beiden andern Hauptachsen, so hat man für den Punkt die Richtungen der drei Hauptachsen des zugehörigen Trägheitsellipsoides.

Beweis. Wird der Punkt $x = a$ auf der X-Achse zur Untersuchung genommen, so handelt es sich in Bezug auf diesen um die neuen Koordinaten $\xi = (x - a)$, $\eta = y$, $\zeta = z$. Die Centrifugalmomente für das neue Koordinatensystem sind also 1) $\sum m\xi\eta = \sum m(x-a)z = \sum mxy - \sum may = \sum mxy - aJy_s = 0$, denn $\sum mxy$ war im alten Systeme gleich Null, da es sich um die Hauptachse des Centralellipsoides handelte, und der Schwerpunktsabstand y_s ist gleich Null, denn er liegt im Mittelpunkte des Centralellipsoides.

2) $\sum m\eta\zeta = \sum myz = 0$ aus entsprechendem Grunde.

3) $\sum m\zeta\xi = \sum mz(x-a) = \sum mxz - \sum maz = \sum mxz - aJz_s = 0$, ähnlich wie vorher.

392) Verschiebungssatz für das Centrifugalmoment.

Verschiebt man den Nullpunkt des Koordinatensystems um $-a$, $-b$, $-c$ vom Schwerpunkte weg, so werden die Centrifugalmomente M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} in $M_{xy} + abJ$, $M_{yz} + bcJ$, $M_{xz} + caJ$ verwandelt.

Beweis. $\sum mxy$ geht über in $\sum m(x+a)(y+b) = \sum mxy + a\sum my + b\sum mx + ab\sum m$.

Dabei ist $\sum my = 0$ und $\sum mz = 0$, weil es sich um den Schwerpunkt als Nullpunkt des Koordinatensystems handelt. Es bleibt übrig

$$M_{x_1 y_1} = M_{xy} + abJ.$$

Ebenso ist es bei den beiden andern Momenten.

393) Ist in $M_{xy} + abJ$ eine der beiden Koordinaten a, b gleich Null, so ist der Zusatz Null. Folglich:

Verschiebt man das Centrifugalmoment auf einer Schwerpunktsachse, so bleibt es ungeändert.

Ist die Schwerpunktsachse nun Hauptachse des Centralellipsoides, so bleibt der Wert des Centrifugalmomentes gleich Null, wenn man es auf dieser verschiebt.

394) **Anwendung.** Für den Schwerpunkt der Kugel sind in Bezug auf beliebig gerichtete Koordinatenachsen x, y, z die Centri-

fugalmomente gleich Null, weil sämtliche Achsen Hauptachsen sind. Verschiebt man nach $-a$, $-b$, $-c$, so erhält man

$$M_{x_1 y_1} = ab\tfrac{4}{3}r^3\pi, \quad M_{y_1 z_1} = bc\tfrac{4}{3}r^3\pi, \quad M_{z_1 x_1} = ca\tfrac{4}{3}r^3\pi.$$

Ebenso ist es bei allen Körpern mit drei Symmetrieebenen, welche die drei Hauptachsen des Centralellipsoides geben. Man kann also für beliebige parallele Koordinatenebenen sofort die Centrifugalmomente hinschreiben.

395) Bisweilen lassen sich die Centrifugalmomente leicht für andere Koordinatenachsen berechnen, bei Sektoren von Drehungskörpern z. B. in Bezug auf die Drehungsachse z und die zugehörigen Achsen x und y. Dann hat man die Verschiebung nach dem Schwerpunkte hin vorzunehmen, wobei der Ausdruck abJ bezw. bcJ, caJ abzuziehen ist. Einige Beispiele sollen später gegeben werden.

396) **Aufgabe.** In Bezug auf die Hauptebene eines Trägheitsellipsoides seien bekannt T_{xy}, T_{yz}, T_{zx}. Wie grofs ist das Trägheitsmoment T in Bezug auf eine durch den Koordinatennullpunkt gelegte Ebene, die mit den Hauptebenen yz, zx, xy die Winkel α, β (und γ) bildet?

Auflösung. Zunächst bestimmt sich γ aus der Gleichung

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

Aus Gleichung 1) des Abschnittes 385 folgt für das Lot l auf der gegebenen Ebene, welches mit den Achsen dieselben Winkel α, β und γ bildet,

$$T_l = T_{yz}\sin^2\alpha + T_{zx}\sin^2\beta + T_{xy}\sin^2\gamma,$$

denn die Centrifugalmomente fallen weg. Folglich ist für die gegebene Ebene im Anschlufs an 390c

$$T = T_p - T_l = T_{yz} + T_{zx} + T_{xy} - (T_{yz}\sin^2\alpha + T_{zx}\sin^2\beta + T_{xy}\sin^2\gamma)$$

oder

$$T = T_{yz}\cos^2\alpha + T_{zx}\cos^2\beta + T_{xy}\cos^2\gamma.$$

Die Formel für Planmomente ist also ganz analog der Formel für die Axialmomente.

397) Möglichkeit von Fixpunkten. Früher wurde gezeigt, dafs für jede ebene Fläche zwei Fixpunkte existieren, in Bezug auf