Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Drehungssatz für Planmomente.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

fugalmomente gleich Null, weil sämtliche Achsen Hauptachsen sind. Verschiebt man nach $-a$, $-b$, $-c$, so erhält man

$$M_{x_1 y_1} = ab\,\tfrac{4}{3} r^3 \pi, \quad M_{y_1 z_1} = bc\,\tfrac{4}{3} r^3 \pi, \quad M_{z_1 x_1} = ca\,\tfrac{4}{3} r^3 \pi.$$

Ebenso ist es bei allen Körpern mit drei Symmetrieebenen, welche die drei Hauptachsen des Centralellipsoides geben. Man kann also für beliebige parallele Koordinatenebenen sofort die Centrifugalmomente hinschreiben.

395) Bisweilen lassen sich die Centrifugalmomente leicht für andere Koordinatenachsen berechnen, bei Sektoren von Drehungskörpern z. B. in Bezug auf die Drehungsachse z und die zugehörigen Achsen x und y. Dann hat man die Verschiebung nach dem Schwerpunkte hin vorzunehmen, wobei der Ausdruck abJ bezw. bcJ, caJ abzuziehen ist. Einige Beispiele sollen später gegeben werden.

396) **Aufgabe.** In Bezug auf die Hauptebene eines Trägheitsellipsoides seien bekannt T_{xy}, T_{yz}, T_{zx}. Wie grofs ist das Trägheitsmoment T in Bezug auf eine durch den Koordinatennullpunkt gelegte Ebene, die mit den Hauptebenen yz, zx, xy die Winkel α, β (und γ) bildet?

Auflösung. Zunächst bestimmt sich γ aus der Gleichung

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

Aus Gleichung 1) des Abschnittes 385 folgt für das Lot l auf der gegebenen Ebene, welches mit den Achsen dieselben Winkel α, β und γ bildet,

$$T_l = T_{yz}\sin^2\alpha + T_{zx}\sin^2\beta + T_{xy}\sin^2\gamma,$$

denn die Centrifugalmomente fallen weg. Folglich ist für die gegebene Ebene im Anschlufs an 390c

$$T = T_p - T_l = T_{yz} + T_{zx} + T_{xy} - (T_{yz}\sin^2\alpha + T_{zx}\sin^2\beta + T_{xy}\sin^2\gamma)$$

oder

$$T = T_{yz}\cos^2\alpha + T_{zx}\cos^2\beta + T_{xy}\cos^2\gamma.$$

Die Formel für Planmomente ist also ganz analog der Formel für die Axialmomente.

397) Möglichkeit von Fixpunkten. Früher wurde gezeigt, dafs für jede ebene Fläche zwei Fixpunkte existieren, in Bezug auf

welche die Trägheitsellipse ein Kreis ist. Es fragt sich, ob solche auch für jeden Körper in dem Sinne vorhanden sind, daſs das Trägheitsellipsoid in Bezug auf sie eine Kugel ist, so daſs auch hier Erleichterungen eintreten würden. Es wird sich zeigen, daſs dies im allgemeinen nicht, sondern nur unter gewissen Bedingungen der Fall ist.

Man gehe von dem Koordinatensysteme der Hauptachsen des Centralellipsoides mit dem Schwerpunkte als Nullpunkt aus. Soll ein Punkt mit den Koordinaten a, b, c ein Fixpunkt sein, so müssen die durch ihn gelegten Parallelen zu den Koordinatenachsen Hauptachsen sein, denn jede Gerade durch den Mittelpunkt ist für die Kugel Hauptachse. Für diese Parallelen müſsten also die Centrifugalmomente verschwinden, d. h. es müſste sein

$$1)\quad \sum m(y-b)(z-c)=0,\quad 2)\quad \sum m(z-c)(x-a)=0,$$
$$3)\quad \sum m(x-a)(x-b)=0.$$

Zunächst soll die erste dieser Gleichungen untersucht werden. Sie lautet

$$\sum myz - b\sum mz - c\sum my + bc\sum m = 0.$$

Weil die Koordinaten Hauptachsen waren, ist $\sum myz = 0$ als zugehöriges Centrifugalmoment. Ferner ist $b\sum mz = bJz_s$, wo J der Inhalt des Körpers, z_s sein Schwerpunktsabstand ist. Dieser aber ist Null, denn es war vom Centralellipsoid ausgegangen, also ist $b\sum mz = 0$. Ebenso ist $c\sum my = 0$. Die Gleichung beschränkt sich auf $bc\sum m = bcJ = 0$. Da J als Körperinhalt von Null verschieden ist, muſs das Produkt $bc = 0$ sein.

Ebenso giebt die zweite Gleichung die Bedingung $ca = 0$, die dritte die Bedingung $ab = 0$.

Erste Bedingung dafür, daſs der Punkt ein Fixpunkt sei, ist also, daſs zwei der Koordinaten a, b, c gleich Null sind, d. h. der Punkt muſs auf einer der Koordinatenachsen liegen, d. h. auf einer Hauptachse. Angenommen nun, der Punkt habe die Koordinaten a, $b = 0$, $c = 0$, er liege also auf der durch den Schwerpunkt gehenden X-Achse, so sind, wenn T_x, T_y, T_z die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptachsen bedeuten, die in Bezug auf die durch den Punkt gelegten Parallelen genommenen T_x, $T_y + a^2J$, $T_z + a^2J$ (Verschiebungssatz). Da sie aber gleich groſs sein sollen, so folgt zunächst aus $T_y + a^2J = T_z + a^2J$, daſs $T_y = T_z$ sein muſs, d. h. das ursprüngliche Centralellipsoid muſs ein Drehungsellipsoid mit der X-Achse als Drehungsachse sein. Ferner folgt aus $T_x = T_y + a^2J$, daſs $T_x > T_y$ und