Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Beispiele von Centrifugalmomenten.

dafs die Schnittlinie der durch S gelegten Schrägebene mit der Y-Achse zusammenfällt. (In der Figur ist dann γ statt α zu schreiben.)

Die Gleichung für Flächen

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 \cos^2\alpha + \varrho_{zy}^2 \cos^2\beta + \varrho_{xy}^2 \cos^2\gamma$$

oder die für Achsen geltende

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \cos^2\alpha + \varrho_y^2 \cos^2\beta + \varrho_z^2 \cos^2\gamma$$

vereinfacht sich dann dadurch, dafs $\beta = 90^0$ und $\gamma = 90^0 - \alpha$ wird, also

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 \sin^2\gamma + \varrho_{xy}^2 \cos^2\gamma,$$

bezw.

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 \sin^2\gamma + \varrho_z^2 \cos^2\gamma.$$

Da nun

$$c = \pm\sqrt{\frac{T_{zy} - T_{xy}}{J}} = \pm\sqrt{\frac{T_z - T_x}{J}} = \pm\sqrt{\varrho_{zy}^2 - \varrho_{xy}^2} = \pm\sqrt{\varrho_z^2 - \varrho_x^2}$$

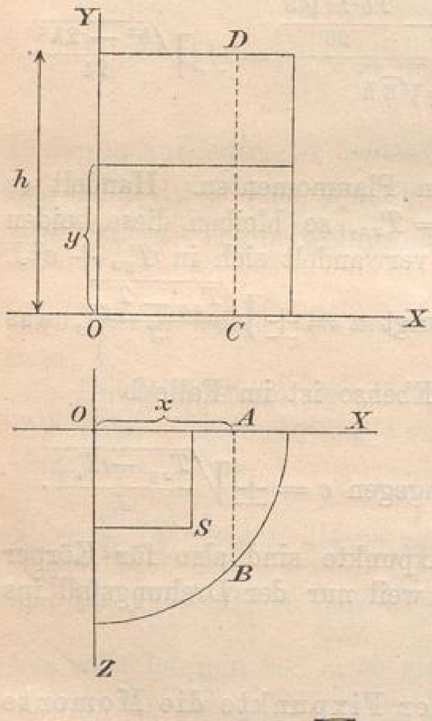
wird, so ergiebt sich dieselbe Berechnungsmethode, wie bei Fig. 122, und es wird

$$\varrho^2 = \varrho_{yz}^2 + p_1 p_2$$

bezw.

$$\varrho^2 = \varrho_x^2 + p_1 p_2.$$

Fig. 280.



403) Einige Beispiele von Centrifugalmomenten.

Quadrant des Kreiscylinders. In der Lage der Figur ist die Schicht in der Höhe y gleich $\frac{r^2\pi}{4}$, ihr Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{4\,r}{3\,\pi}$, das entsprechende Moment also $\frac{r^2\pi}{4}\cdot\frac{4\,r}{3\,\pi} = \frac{r^3}{3}$, das Centrifugalmoment in Bezug auf die Grundebene also $\frac{r^3}{3}y$. Für den Körper von Höhe h erhält man also

$$\sum mxy = \frac{r^3}{3}\frac{h^2}{2} = \frac{r^3 h^2}{6}.$$

Ebenso grofs ist $\sum myz$. Dagegen ist $\sum mzx$ folgendermafsen zu berechnen. Die Schicht im Abstande x ist gleich

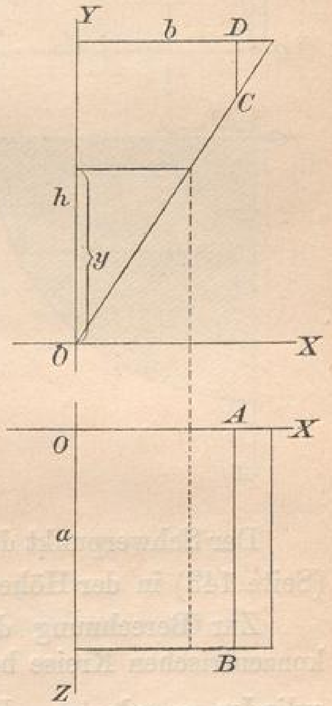
$$AB \cdot CD = h\sqrt{r^2 - x^2},$$

der Schwerpunktsabstand von der Ebene XY ist $\frac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2}$, das entsprechende Moment also $\frac{h}{2}(r^2 - x^2)$. Dies mit dem Abstande x multipliziert giebt $\frac{h}{2}r^2x - \frac{h}{2}x^3$. Für den ganzen Körper von 0 bis r entsteht $\frac{h}{2}r^2\frac{r^2}{2} - \frac{h}{2}\frac{r^4}{4} = \frac{hr^4}{8}$. Die Verlegung nach dem Schwerpunkte des Körpers hin bietet keine Schwierigkeit.

404) Dreieckskörper. Schicht in Höhe y ist $a\frac{b}{h}y$, Schwerpunktsabstand von Ebene YZ ist $\frac{1}{2}\frac{b}{h}y$, das entsprechende Moment also $\frac{ab^2}{2h^2}y^2$, das Centrifugalmoment für die Grundebene also $\frac{ab^2}{2h^2}y^3$. Für den ganzen Körper von 0 bis h entsteht also

$$\sum mxy = \frac{ab^2}{2h^2}\frac{h^4}{4} = \frac{ab^2h^2}{8}.$$

Fig. 281.



Die Schicht $a\frac{b}{h}y$ hat von der Ebene XY den Schwerpunktsabstand $\frac{a}{2}$ und das statische Moment $\frac{a^2b}{2h}y$, dies mit y multipliziert, giebt für die Grundebene des Centrifugalmoment $\frac{a^2b}{2h}y^2$. Für den ganzen Körper wird

$$\sum myz = \frac{a^2b}{2h}\frac{h^3}{3} = \frac{a^2bh^2}{6}.$$

Im Abstande x hat man die Schicht

$$AB \cdot CD = a \cdot h\frac{b-x}{b} = ah - \frac{ah}{b}x.$$

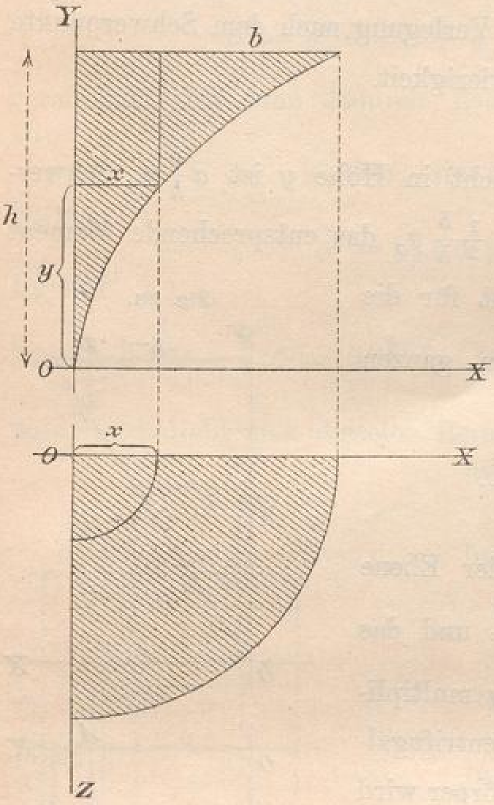
Ihr Abstand von der Ebene XY ist $\frac{a}{2}$, also das statische Moment $\frac{a^2}{2}h - \frac{a^2h}{2b}x$. Dies ist mit x zu multiplizieren und giebt das Centrifugalmoment $\frac{a^2}{2}hx - \frac{a^2h}{2b}x^2$. Für den ganzen Körper wird

$$\sum mzx = \frac{a^2h}{2}\frac{b^2}{2} - \frac{a^2h}{2b}\frac{b^3}{3} = \frac{a^2b^2h}{12}.$$

Die Verlegung nach dem Schwerpunkte hin macht keine Schwierigkeiten.

In ähnlicher Weise lassen sich parabolische Cylinder p^{ter} Ordnung und entsprechende Sektoren von Drehungsparaboloiden behandeln, auch kann man zu Drehungskörpern übergehen, deren Profilkurven Parabeln gemischter Ordnung angehören, z. B.:

Fig. 282.



405) Quadrant eines parabolischen Drehungskörpers.

In Höhe y ist $x = \frac{b}{h^2} y^2$, die Viertelkreisschicht ist also

$$\frac{x^2 \pi}{4} = \frac{b^2 y^4 \pi}{4 h^4},$$

sein Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{4x}{3x} = \frac{4by^2}{3\pi h^2}$, also das Moment

$$\sum mx = \frac{b^2 y^4 \pi}{4 h^4} \cdot \frac{4 b y^2}{3 \pi h^2} = \frac{b^3 y^6}{3 h^6}.$$

Dies mit y multipliziert giebt $\frac{b^3 y^7}{3 h^6}$ als das Centrifugalmoment der Schicht in Bezug auf die Grundebene. Für den ganzen Körper wird

$$\sum mxy = \frac{b^3}{3 h^6} \frac{h^8}{8} = \frac{b^3 h^2}{24}.$$

Der Schwerpunkt des Körpers liegt nach der parabolischen Tabelle (Seite 143) in der Höhe $y_s = \frac{5}{6} h$, wie der des vollständigen Körpers.

Zur Berechnung des andern Abstandes kann die Methode der konzentrischen Kreise benutzt werden. In Fig. 282 ist einer der Teilcylinder angedeutet. Ist x sein Radius, so ist die Grundlinie $\frac{x\pi}{2}$, die Höhe $h - y = h - \frac{h}{\sqrt{b}} \sqrt{x}$, also die Mantelfläche

$$\frac{x\pi}{2} h - \frac{x\pi}{2} \frac{h}{\sqrt{b}} \sqrt{x} = \frac{\pi h}{2} x - \frac{\pi h}{2\sqrt{b}} x^{\frac{3}{2}}.$$

Sein Schwerpunktsabstand von der Ebene YZ ist $\frac{2x}{\pi}$, also das statische Moment in Bezug auf diese

$$\frac{2x}{\pi}\frac{\pi h}{2}x - \frac{2x}{\pi}\frac{\pi h}{2\sqrt{b}}x^{\frac{3}{2}} = hx^2 - \frac{h}{\sqrt{b}}x^{\frac{5}{2}}.$$

Läſst man die Radien von 0 bis b wachsen, so erhält man das statische Gesamtmoment des Körpers als

$$h\frac{b^3}{3} - \frac{h}{b^{\frac{1}{2}}}\frac{b^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{7}\right)hb^3 = \tfrac{1}{21}hb^3.$$

Dividiert man dies durch den Körperinhalt $\frac{1}{4}\cdot b^2\pi\frac{h}{5} = \frac{b^2\pi h}{20}$, so folgt als Schwerpunktsabstand $x_s = \frac{20\,b}{21\,\pi}$. Verlegt man endlich das Centrifugalmoment $\frac{b^3h^2}{24}$ nach dem Schwerpunkte, so ist abzuziehen

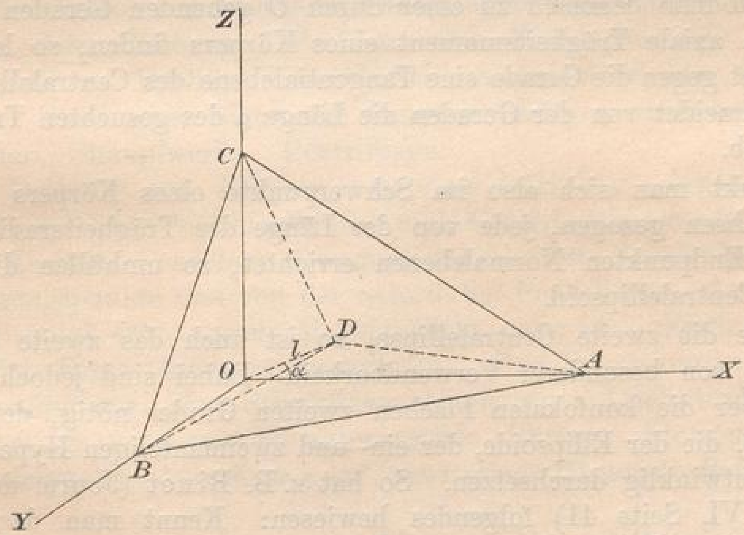
$$x_s\cdot y_s J = \frac{20\,b}{21\,\pi}\cdot\frac{5\,h}{6}\cdot\frac{b^2\pi h}{20} = \tfrac{5}{126}b^3h^2,$$

so daſs man hat $\frac{b^3h^2}{504}$.

406) Das zweite Centralellipsoid.

Bildet man ein Centralellipsoid, dessen Hauptachsen nicht die

Fig. 283.



reciproken Werte der Radien a, b, c, sondern diese selbst sind, so ist seine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Die Tangentialebene ABC in Figur 283, die sich in einem Punkte