



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Das zweite Central-Ellipsoid.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

$$\frac{2x\pi h}{\pi \cdot 2} x - \frac{2x\pi h}{\pi \cdot 2\sqrt{b}} x^{\frac{3}{2}} = hx^2 - \frac{h}{\sqrt{b}} x^{\frac{5}{2}}.$$

Läßt man die Radien von 0 bis b wachsen, so erhält man das statische Gesamtmoment des Körpers als

$$h \frac{b^3}{3} - \frac{h}{\frac{1}{b^2} \frac{7}{2}} \frac{b^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7}\right) hb^3 = \frac{1}{21} hb^3.$$

Dividiert man dies durch den Körperinhalt $\frac{1}{4} \cdot b^2 \pi \frac{h}{5} = \frac{b^2 \pi h}{20}$, so folgt als Schwerpunktsabstand $x_s = \frac{20b}{21\pi}$. Verlegt man endlich das Centrifugalmoment $\frac{b^3 h^2}{24}$ nach dem Schwerpunkte, so ist abzuziehen

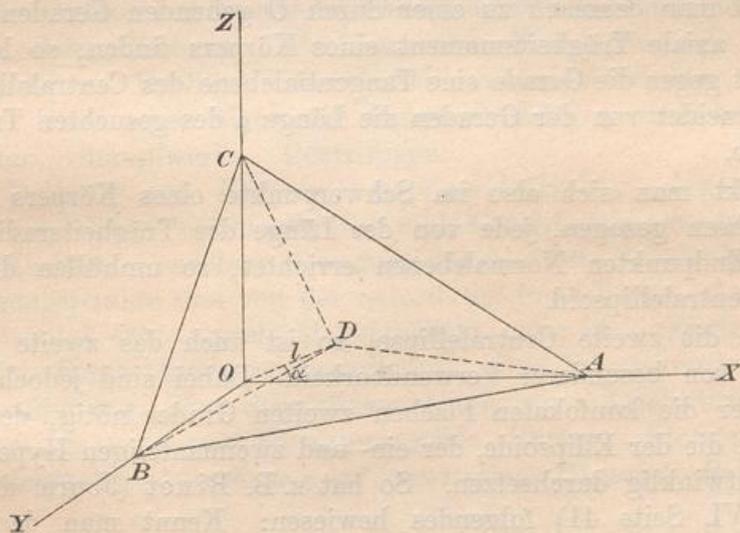
$$x_s \cdot y_s J = \frac{20b}{21\pi} \cdot \frac{5h}{6} \cdot \frac{b^2 \pi h}{20} = \frac{5}{126} b^3 h^2,$$

so daß man hat $\frac{b^3 h^2}{504}$.

406) Das zweite Centralellipsoid.

Bildet man ein Centralellipsoid, dessen Hauptachsen nicht die

Fig. 283.



reciproken Werte der Radien a, b, c , sondern diese selbst sind, so ist seine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Die Tangentialebene ABC in Figur 283, die sich in einem Punkte

x, y, z der Fläche an diese legen läßt, hat, wie leicht zu zeigen ist, die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1.$$

Setzt man y und z gleich Null, so folgt für A der Abstand $OA = x = \frac{a^2}{x_1}$. Ist OD das Lot vom Nullpunkte auf die Fläche, so wird für dessen Winkel mit der X -Achse $\frac{l}{x} = \frac{lx_1}{a^2} = \cos \alpha$. Ebenso $\cos \beta = \frac{ly_1}{b^2}$, $\cos \gamma = \frac{lz_1}{c^2}$. Daraus kann man bilden

$$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma = l^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} \right) = l^2,$$

denn weil der gegebene Punkt auf der Fläche des Ellipsoides liegt, ist die letzte Klammer gleich 1. Nach Abschnitt 385 ist aber der Ausdruck links, wenn man wie hier von den Hauptachsen des Centralellipsoides ausgegangen ist, gleich dem Werte des Trägheitsradius für die Achse mit den Winkeln α, β, γ .

Das von Clebsch eingeführte und von Culmann vielfach benutzte zweite Centralellipsoid hat also die Eigenschaft, daß die Lote vom Nullpunkte auf die Tangentialebenen den Längen der Trägheitsradien für die betreffenden Achsen entsprechen.

Will man demnach zu einer durch O gehenden Geraden das zugehörige axiale Trägheitsmoment eines Körpers finden, so lege man senkrecht gegen die Gerade eine Tangentialebene des Centralellipsoides, diese schneidet von der Geraden die Länge ρ des gesuchten Trägheitsradius ab.

Denkt man sich also im Schwerpunkte eines Körpers beliebig viele Achsen gezogen, jede von der Länge des Trägheitsradius, und in den Endpunkten Normalebene errichtet, so umhüllen diese das zweite Centralellipsoid.

Wie die zweite Centralellipse, so ist auch das zweite Centralellipsoid von besonderer Verwendbarkeit. Dabei sind jedoch Kenntnisse über die konfokalen Flächen zweiten Grades nötig, deren drei Gruppen, die der Ellipsoide, der ein- und zweimanteligen Hyperboloide sich rechtwinklig durchsetzen. So hat z. B. Binet (Journ. de l'école polyt. XVI, Seite 41) folgendes bewiesen: Kennt man das zweite Centralellipsoid eines Körpers und sucht man die Richtung der Hauptachsen für einen beliebigen Raumpunkt, so braucht man nur für die drei zum Centralellipsoid konfokalen Flächen, die durch den Punkt gelegt werden können, in diesem die Normalen zu errichten, wodurch man die gesuchten Achsenrichtungen hat. Auch die Längen lassen sich leicht berechnen.

Man vergleiche hierzu die in den Vorbemerkungen besprochene Abhandlung von Clebsch und den betreffenden Abschnitt in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik, z. B. bei Schell, ebenso in der Graphischen Statik von Culmann.

Hier ist das zweite Ellipsoid nur der Vollständigkeit wegen genannt.

407) Bemerkungen zur Methode von Reye. Reye hat in Schlömilchs Zeitschrift, Band X, Seite 432 u. s. f. gezeigt, wie man für die Zwecke der Mechanik einen Körper durch einen Massenpunkt ersetzen kann, ähnlich wie in Abschnitt VII F die ebene Fläche durch drei Punkte ersetzt wurde. Auch auf diese ziemlich viel Vorkenntnisse beanspruchenden Dinge soll hier nur hingewiesen werden, da sie über den elementaren Zweck dieses Buches hinausgehen.

408) Anwendbarkeit der Lehre von den körperlichen Trägheits- und Centrifugalmomenten.

a) Berechnung der Energie von Körpern, die sich um eine feste Schwerpunktsachse drehen. Wucht von Schwungrädern, Mühl- und Schleifsteinen. Einfluß der Schwungmassen auf plötzlich festgeklemmte Wellen oder Achsen. Arbeitsleistung, Überwindung von Reibungswiderständen in Folge der Wucht. Beschleunigte Drehung um solche Achsen. Atwoodsche Fallmaschine ohne und mit Berücksichtigung der Reibung. Probleme der Fadenspannung. — Das Schwungrad als Egalisator der Maschinen bei einer oder mehreren Kurbeln. Stofs gegen einen sich drehenden Körper, unelastischer und elastischer. Stampfwerke. Centrifugen.

b) Drehung von Körpern um eine beliebige feste Achse. Einwirkung der Centrifugalkräfte und Centrifugalmomente auf die Achse. Energie. Pendelnde Bewegung um eine feste Achse. Lehre vom Schwingungspunkte und von der reduzierten Pendellänge. Anwendung auf horizontal schwingende Magnetnadeln unter dem Einflusse einer richtenden Kraft (Intensitätsmessungen). Das Reversionspendel und die Bestimmung der Schwerebeschleunigung. Unelastischer und elastischer Stofs gegen so schwingende Körper. Stofspunkt und Stofsmittelpunkt. Anwendung auf schwingende Hämmer. Ballistisches Pendel.

c) Berechnung der Energie von Körpern, die sich fortschreitend und drehend bewegen. Herabrollen auf schiefer Ebene unter Berücksichtigung des Widerstandes gegen das Drehen. Beschleunigtes Rollen auf horizontaler Ebene. Verlangsamtes Fallen beim Abwickeln umgeschlungener Fäden von der Achse. Anwendungen der Fadenspannung auf die Reibungstheorie. Grenzwinkel für das alleinige