



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

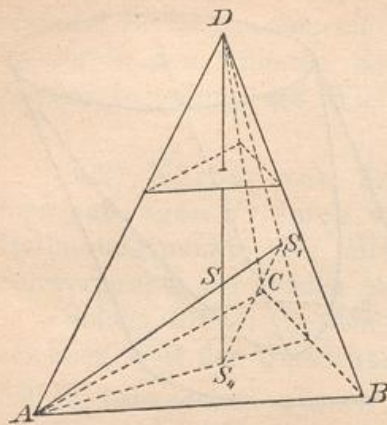
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Kugelsektor.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Fig. 225.



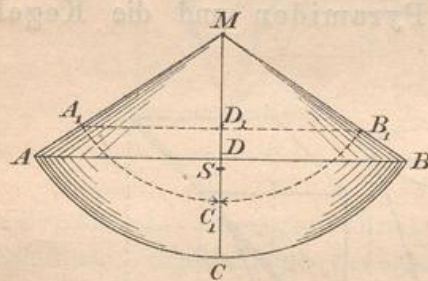
$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{ch^4}{\frac{4}{3}ch} = \frac{3}{4}h,$$

läßt sich aber auch für die Pyramide durch eine geometrische Betrachtung nachweisen und gilt dann nach Cavalieri für die sämtlichen Körper dieser Gruppe. Alle Schichten der in Fig. 225 dargestellten Pyramide haben nämlich die Schwerpunkte in der Mittellinie DS_4 , in dieser muß also der Schwerpunkt liegen. Dasselbe gilt von der Mittellinie AS_1 . Die Dreiecke ASD und S_1SS_4 sind ähnlich und ihr Maßstabverhältnis ist $3:1$, folglich ist $S_4S = \frac{1}{3}SD$, folglich $S_4S = \frac{1}{4}S_4D$ und daher bei dieser Aufstellung $h_s = \frac{1}{4}h$.

An Stelle der in Figur 224 dargestellten Körper können auch solche mit schiefen Mittellinien (bezw. schiefen Seitenflächen) treten.

307) Anwendung auf den Kugelsektor. Wie bei der Rechnungsmethode der Kalotte denke man sich den Sektor in lauter Pyramiden zerlegt, die ihre unendlich kleine Basis in der Kalotte haben, deren Spitze aber in M liegt.

Fig. 226.



Alle diese Pyramiden haben ihre Schwerpunkte in der Entfernung $\frac{3}{4}r$ von M . Die Schwerpunkte bilden also selbst eine Kalotte, die der gegebenen ähnlich ist. Der Schwerpunkt des Sektors stimmt überein mit dem der neuen Kalotte. Zur Hilfskugel gehört ein unbeschriebener senkrechter Cylinder. Jede Horizontalschicht seiner Mantels ist von der

Fläche $2r\pi h_1$, und ebenso groß ist jede Schicht der Kalotte. Weil nun der Mantel des Hülfszylinders seinen Schwerpunkt in halber Höhe hat, so hat auch die Hülfskalotte den ihren in halber Höhe. In Fig. 226 hat man also nur D_1C_1 zu halbieren, um S zu finden.

Nun ist aus Ähnlichkeitsgründen $MD_1 = \frac{3}{4}MD = \frac{3}{4}(r-h)$, wo h die Pfeilhöhe der Kalotte ist, also $D_1C_1 = \frac{3}{4}r - \frac{3}{4}(r-h) = \frac{3}{4}h$, folglich

$$D_1S = \frac{1}{2}D_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}h = \frac{3}{8}h,$$

folglich

$$MS = \frac{3}{4}(r-h) + \frac{3}{8}h = \frac{3}{8}[2r - 2h + h] = \frac{3}{8}(2r - h).$$

Anwendung auf die Halbkugel. Für $h = r$ geht der Sektor in die Halbkugel über, für diese folgt also $MS = \frac{3}{8}(2r - r) = \frac{3}{8}r$. Die Wiederholung der vorigen Berechnungsart fällt für diese ganz einfach aus.

308) Stumpfe der Körper zweiter Ordnung. Einige solche sind in Fig. 224 angedeutet. Kann man die Berechnung für den Kegelstumpf durchführen, so ist sie für alle andern Formen erledigt.

In Fig. 227 seien die Radien r und ρ , die Stumpfhöhe h . Der ergänzte Kegel hat die Höhe $y = \frac{hr}{r-\rho}$, wie eine einfache Betrachtung ergibt, also liegt der Schwerpunkt S_2 des Ergänzungskegels in der Höhe

$$h + \frac{y-h}{4} = \frac{3h+y}{4},$$

der des ganzen Kegels in der Höhe $\frac{y}{4}$. Nach dem Satze von den statischen Momenten ist

$AS_1 \cdot \text{Stumpf} + AS_2 \cdot \text{Ergänzungskegel} = SA \cdot \text{ganzer Kegel}$, oder

$$h_s \left[\frac{\pi h}{3} (r^2 + r\rho + \rho^2) \right] + \frac{3h+y}{4} \left(\rho^2 \pi \frac{y-h}{3} \right) = \frac{y}{4} \left(r^2 \pi \frac{y}{3} \right).$$

Setzt man $\frac{hr}{r-\rho}$ für y ein, so ergibt sich schliesslich

$$h_s = \frac{h r^2 + 2 r \rho + 3 \rho^2}{4 r^2 + r \rho + \rho^2}.$$

Multipliziert man oben und unten jedes Glied mit π , so erhält man

$$h_s = \frac{h r^2 \pi + 2 \sqrt{r^2 \pi \rho^2 \pi} + 3 \rho^2 \pi}{4 r^2 \pi + \sqrt{r^2 \pi \rho^2 \pi} + \rho^2 \pi} = \frac{h G_1 + 2 \sqrt{G_1 G_2} + 3 G_2}{4 G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2},$$

wo G_1 die untere, G_2 die obere Fläche ist, wobei gleichgültig ist, welche von beiden als die grössere angenommen wird.

Diese letzte Formel gilt nun für sämtliche Stumpfe dieser Gruppe.

309) Nach Nr. 164 läst sich für die Querschnittsformel $q_y = cy^2$ im Anschluß an die Figur 224, auf deren Grundfläche die Abstände h_1 und h_2 zu beziehen sind, die Schwerpunktshöhe folgendermassen berechnen:

Fig. 227.

