Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Körper gemischter Ordnung bis zum zweiten Grade.

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{\frac{ch_2^4}{4} - \frac{ch_1^4}{4}}{\frac{ch_2^3}{3} - \frac{ch_1^3}{3}} = \frac{3}{4}\,\frac{h_2^4 - h_1^4}{h_2^3 - h_1^3},$$

was noch durch $h_2 - h_1$ gekürzt werden könnte, wodurch jedoch die Formel an Einfachheit verliert.

Dafs sich auch die Simpsonsche Regel anwenden läfst, ergiebt aus den nachstehenden allgemeinen Betrachtungen.

310) Körper gemischter Ordnung bis zum zweiten Grade. Hierher gehören die Kugel, der Kugelabschnitt und die Kugelschicht, das Drehungsellipsoid mit Abschnitt und Schicht, das dreiachsige Ellipsoid mit Abschnitt und Schicht, das einmantelige und zweimantelige Drehungsellipsoid (letzteres auch mit seinen Schichten), das ein- und zweimantelige dreiachsige Hyperboloid, das hyperbolische Paraboloid, sämtliche Prismatoide mit ebenen oder windschiefen Seitenflächen. Dafs dies der Fall ist, soll für jedes Beispiel nachgewiesen werden.

311) a) Berechnung mit Hülfe der Schichtenformel. Ist der Querschnitt von der Form

$$q_y = a + by + cy^2,$$

so liegt nach Nr. 178 der Schwerpunkt in der Höhe

$$y_s = \frac{\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4}}{\frac{ay^2}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3}}.$$

Hier könnte noch durch y gekürzt werden, jedoch verliert die Formel dadurch an Übersichtlichkeit.

312) b) Berechnung mit Hülfe der Simpsonschen Regel. Ist der Querschnitt von der Form

$$q_y = a + by + cy^2,$$

so ist sein statisches Moment in Bezug auf die Grundfläche

$$m_y = ay + by^2 + cy^3.$$

Da nun der dritte Grad nicht überstiegen ist, kann sowohl der Inhalt, als auch das statische Moment nach der Simpsonschen Regel berechnet werden.

Der Inhalt wird

$$J = \frac{h}{6}(U + O + 4M),$$

wo U den Unterschnitt, O den Oberschnitt, M den Mittelschnitt bedeutet. Das statische Moment wird

$$M_1 = \frac{h}{6}(U' + O' + 4M'),$$

wo U' das statische Moment des Unterschnittes, O' das des Oberschnittes, M' das des Mittelschnittes in bezug auf die Grundfläche bedeutet.

Demnach wird die Schwerpunktshöhe

$$h_s = \frac{M_1}{J} = \frac{U' + O' + 4M'}{U + O + 4M}.$$

Nun ist aber $U' = U \cdot 0 = 0$, $O' = O \cdot h$, $M' = M \cdot \frac{h}{2}$, also wird der Zähler gleich $Oh + 4M\frac{h}{2} = h(O + 2M)$. Demnach folgt

$$h_s = h\frac{O + 2M}{U + O + 4M}.$$

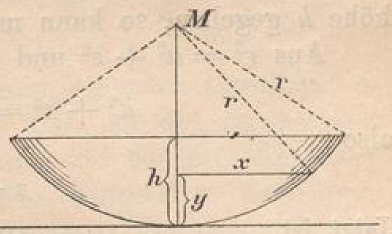
Im allgemeinen ist die Summenformel vorzuziehen, weil man bei ihr den Mittelschnitt nicht besonders zu berechnen braucht. In vielen Fällen aber wird die Simpsonsche Regel dadurch besonders einfach, dafs einzelnes ganz wegfällt.

313) Beispiel des Kugelabschnitts.

Aus $x^2 = r^2 - (r-y)^2 = 2ry - y^2$ folgt als Querschnittsfläche

$$q_y = x^2\pi = 2r\pi y - \pi y^2.$$

Fig. 228.



Hat also das Kugelsegment die Höhe h, so folgt als Schwerpunktshöhe

$$y_s = \frac{M}{J} = \frac{2r\pi\frac{h^3}{3} - \pi\frac{h^4}{4}}{2r\pi\frac{h^2}{2} - \pi\frac{h^3}{3}} = \frac{h}{4}\cdot\frac{8r - 3h}{3r - h}.$$

(Für $h = r$ ergiebt sich $\frac{5}{8}r$ als Schwerpunktshöhe der Halbkugel.) Die Simpsonsche Regel ist hier unbequemer, als die Summenformel. Man wende sie trotzdem zur Übung an.

314) Beispiel der Kugelschicht.

a) Sind h_2, h_1 und r gegeben, so ist nach dem Vorigen in Bezug auf die Grundfläche

$$J_2 - J_1 = \left(2r\pi\frac{h_2^2}{2} - \pi\frac{h_2^3}{3}\right) - \left(2r\pi\frac{h_1^2}{2} - \pi\frac{h_1^3}{3}\right),$$

$$M_2 - M_1 = \left(2r\pi\frac{h_2^3}{3} - \pi\frac{h_2^4}{4}\right) - \left(2r\pi\frac{h_1^3}{3} - \pi\frac{h_1^4}{4}\right),$$

folglich

$$y_s = \frac{M_2 - M_1}{J_2 - J_1} = \frac{\frac{2r\pi}{3}\left(h_2^3 - h_1^3\right) - \frac{\pi}{4}\left(h_2^4 - h_1^4\right)}{\frac{2r\pi}{2}\left(h_2^2 - h_1^2\right) - \frac{\pi}{3}\left(h_2^3 - h_1^3\right)}$$

$$= \frac{8r\left(h_2^3 - h_1^3\right) - 3\left(h_2^4 - h_1^4\right)}{12r\left(h_2^2 - h_1^2\right) - 4\left(h_2^3 - h_1^3\right)}.$$

Hier könnte noch mittels $(h_2 - h_1)$ gekürzt werden, was aber die Formel nicht vereinfachen würde.

Fig. 229

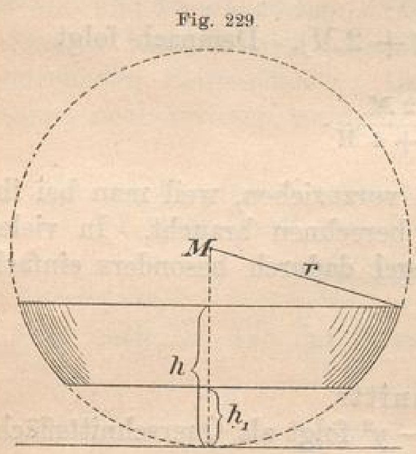
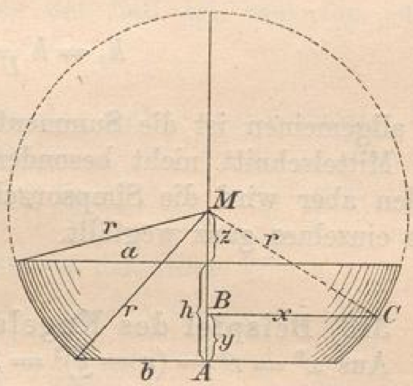


Fig. 230.



b) Sind jedoch die meſsbaren Radien a und b und die Schichthöhe h gegeben, so kann man folgendermaſsen verfahren.

Aus $r^2 = a^2 + z^2$ und $r^2 = b^2 + (h + z)^2$ folgt

$$a^2 + z^2 = b^2 + h^2 + 2hz + z^2,$$

also

$$z = \frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}.$$

Jetzt ist

$$x^2 = r^2 - MB^2 = a^2 + z^2 - (z + h - y)^2$$
$$= (a^2 - h^2 - 2hz) + 2(z + h)y - y^2, \text{*)}$$

also

$$q_y = x^2\pi = \pi\left[(a^2 - h^2 - 2hz) + 2(z + h)y - y^2\right],$$

*) Dies ist die Gleichung des Kreises in Bezug auf A als Nullpunkt des Koordinatensystems.

folglich

$$\overset{h}{\underset{0}{J}} = \pi\left[(a^2 - h^2 - 2h)\frac{h}{1} + 2(z+h)\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}\right] = \pi h\left[a^2 - zh - \frac{h^2}{3}\right].$$

Setzt man hier den Wert von z ein, so erhält man

$$J = \frac{\pi h}{6}[3a^2 + 3b^2 + h^2].$$

Dagegen wird

$$\overset{h}{\underset{0}{M}} = \pi\left[(a^2 - h^2 - 2h)\frac{h^2}{2} + 2(z+h)\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4}\right] = \frac{\pi h^2}{12}[6a^2 - 4hz - h^2],$$

Einsetzung des Wertes von z giebt

$$M = \frac{\pi h^2}{12}\cdot[4a^2 + 2b^2 + h^2].$$

Endlich folgt

$$y_s = \frac{M}{J} = \frac{h}{2}\cdot\frac{4a^2 + 2b^2 + h^2}{3a^2 + 3b^2 + h^2}.$$

Setzt man $b = 0$, so erhält man eine neue Formel für das Segment, nämlich

$$y_s = \frac{h}{2}\cdot\frac{4a^2 + h^2}{3a^2 + h^2},$$

die der früheren vorzuziehen ist, weil sie nur meſsbare Stücke enthält. Setzt man oben $a = 0$, so folgt

$$y_s = \frac{h}{2}\cdot\frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}$$

als Schwerpunktsabstand des Segments von seiner Grundfläche. Die vorangehende Formel gab den vom Scheitelpunkte aus gemessenen Abstand.

315) Damit sind zugleich die Schichten der nach Cavalieri aus der Kugel abzuleitenden Körper erledigt, z. B. der des Drehungsellipsoids, des dreiachsigen Ellipsoids und der aus der Halbkugel abzuleitenden Gewölbe. Bei den Ellipsoiden kann man selbstverständlich auch von der Ellipsengleichung ausgehen, ähnlich wie es nachstehend für das Hyperboloid geschehen soll.

316) Beispiel des einmanteligen Drehungshyperboloids.

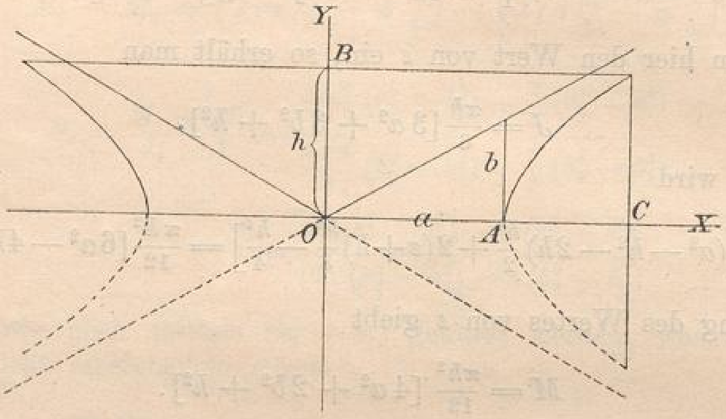
a) Berechnung mit Hülfe der Schichtenformel.

Die Gleichung der Hyperbel sei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Durch Drehung um die Y-Achse entsteht ein einmanteliges Drehungshyperboloid.

Fig. 231.



Aus der Gleichung folgt

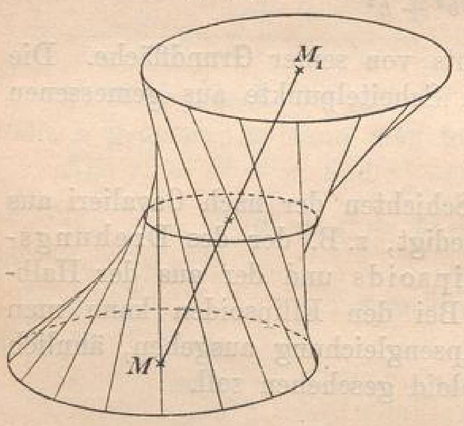
$$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}\, y^2\,,$$

so dafs der Querschnitt des Körpers in der Höhe y wird

$$q_y = x^2\pi = a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2}\, y^2\,.$$

Die Schwerpunktshöhe wird also nach Nr. 174 für den von 0 bis h reichenden Körper

Fig. 232.



$$y_s = \frac{a^2\pi\,\frac{h^2}{2} + \frac{a^2\pi}{b^2}\,\frac{h^4}{4}}{a^2\pi\,\frac{h}{1} + \frac{a^2\pi}{b^2}\,\frac{h^3}{3}}$$

$$= \frac{3\,h}{4} \cdot \frac{2\,b^2 + h^2}{3\,b^2 + h^2}\,,$$

was nur von h und b_1, nicht aber von a abhängig ist.

Ist z. B. $b = 1$ und $h = 2$, so folgt $y_s = \frac{9}{7}$.

Alle nach Cavalieri daraus abzuleitenden Körper, auch die durch Affinität (schräges Koordinatensystem) damit zusammenhängenden, werden ebenso behandelt, z. B. der in Fig. 232 dargestellte.

b) Berechnung mit Hülfe der Simpsonschen Regel.

Aus der Gleichung

$$q_y = a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2} y^2$$

folgt als Oberschnitt

$$O = a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2} h^2,$$

als Mittelschnitt

$$M = a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2}\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

während der Unterschnitt $U = a^2\pi$ ist.

Dies ist nach Nr. 312 in die Formel

$$h_s = h\,\frac{O + 2M}{U + O + 4M}$$

einzusetzen und giebt

$$h_s = h\,\frac{\left(a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2}h^2\right) + 2\left(a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2}\frac{h^2}{4}\right)}{a^2\pi + \left(a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2}h^2\right) + 4\left(a^2\pi + \frac{a^2\pi}{b^2}\frac{h^2}{4}\right)} = \frac{3h}{4}\,\frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2},$$

was mit dem obigen Resultate übereinstimmt. Die Schichtenformel war offenbar vorzuziehen.

317) Das zweimantelige Hyperboloid. Die Gleichung der Hyperbel sei zunächst dieselbe wie vorher, nur geschehe die Drehung um die X-Achse. Um die Schichtenformel anzuwenden, verlege man den Koordinatenanfang nach A, so daſs man statt x zu schreiben hat $(x + a)$, während y unverändert bleibt. Die Gleichung geht dadurch über in

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder in

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

so daſs der senkrechte Querschnitt des Drehungskörpers in der Entfernung x von A wird

$$q_x = y^2\pi = \frac{2b^2\pi}{a}x + \frac{b^2\pi}{a^2}x^2.$$

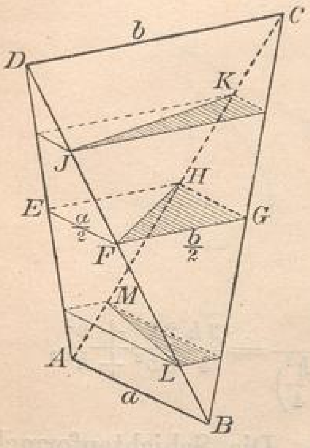
Für den von A bis x_1 (bei C) reichenden Körper wird der von A aus gerechnete Schwerpunktsabstand

$$x_s = \frac{\frac{2b^2\pi}{a}\frac{x_1^3}{3} + \frac{b^2\pi}{a^2}\frac{x_1^4}{4}}{\frac{2b^2\pi}{a}\frac{x_1^2}{2} + \frac{b^2\pi}{a^2}\frac{x_1^3}{3}} = \frac{x_1}{4}\cdot\frac{8a + 3x_1}{3a + x_1}.$$

Ist z. B. $AC = x_1 = 1$ und $a = 1$, so folgt $x_s = \frac{1}{4}\cdot\frac{8+3}{3+1} = \frac{11}{16}$. Der für x_s gefundene Ausdruck ist von b unabhängig. — Aus beiden

Arten von Hyperboloiden lassen sich auch Gestalten ableiten, deren Querschnitte ähnliche Polygone sind, z. B. hyperbolische Gewölbe.

Fig. 233.



318) Prismatoid. Im Method. Lehrbuch, Bd. II, Stereometrie 37 bis 39, sind die allgemeinsten Prismatoide mit ebenen und windschiefen Seitenflächen behandelt, und zwar mit Hülfe des sog. Halbtetraeders.

Führt man in Fig. 233 einen Horizontalschnitt in der Höhe y, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Winkel durch den Kreuzungswinkel der beiden Horizontalen a und b bestimmt werden. Die Parallelogrammseiten b_1 und a_1 ergeben sich aus ähnlichen Dreiecken mit Hülfe der Proportionen $y : h = b_1 : b$ und $(h - y) : h = a_1 : a$ als $b_1 = y\frac{b}{h}$ und $a_1 = a - \frac{a}{h}y$, so dafs die Schnittfläche wird

$$q_y = a_1 b_1 \sin\gamma = \left(a - \frac{a}{h}y\right)\frac{b}{h}y\sin\gamma = \frac{ab\sin\gamma}{h}y - \frac{ab\sin\gamma}{h^2}y^2.$$

Die schraffierte Fläche des Halbtetraeders wird halb so grofs, sein Inhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe y_1 wird

$$J = \frac{ab\sin\gamma}{2h}\left[\frac{y_1^2}{2} - \frac{1}{h}\frac{y_1^3}{3}\right],$$

das statische Moment des bis dahin reichenden Körpers in Bezug auf die Grundfläche wird

$$M = \frac{ab\sin\gamma}{2h}\left[\frac{y_1^3}{3} - \frac{1}{h}\frac{y_1^4}{4}\right],$$

die entsprechende Schwerpunktshöhe also

$$y_s = \frac{\dfrac{y_1^3}{3} - \dfrac{y_1^4}{4h}}{\dfrac{y_1^2}{2} - \dfrac{y_1^3}{3h}} = \frac{y_1}{2}\,\frac{4h - 3y_1}{3h - 2y_1}.$$

Ebenso konnte die Simpsonsche Regel angewandt werden, da q_y den zweiten Grad nicht überschreitet. Setzt man $y_1 = h$, so erhält man $y_s = \frac{h}{2}$.

319) Die windschiefe Fläche des Halbtetraeders ist ein hyperbolisches Paraboloid, über welches man Method. Lehrbuch, Band III,

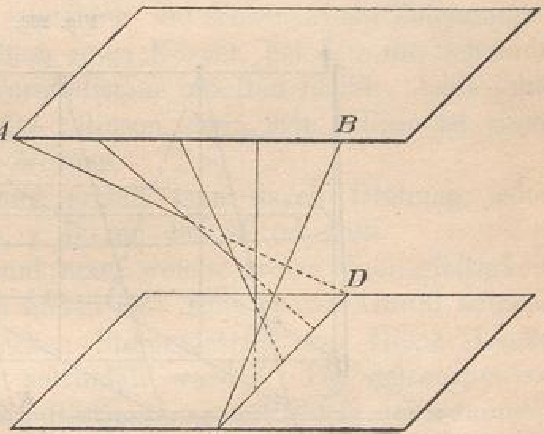
Kegelschnittflächen Nr. 42 vergleiche. In Fig. 234 hat man nur BD zu ziehen, um den Raum des Halbtetraeders zu begrenzen.

Der ganze Raum wird

$$J = \frac{ab \sin \gamma}{2h}\left[\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3h}\right]$$

$$= \frac{ab \sin \gamma h}{12}.$$

Fig. 234.

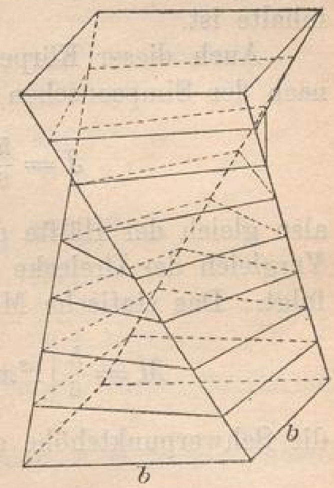


Sein Schwerpunkt liegt in halber Höhe. Die Schicht von beliebiger Höhe y_1 bestimmt sich nach den obigen Formeln.

Damit sind sämtliche Flächen zweiten Grades im wesentlichen erledigt.

320) Fig. 235 stellt ein besonderes Prismatoid mit windschiefen Seitenflächen dar. Im Method. Lehrbuche II, Stereometrie 40, ist es behandelt worden. Man braucht nur einen Eckpunkt der Grundfläche mit dem drüber liegenden der oberen Fläche zu verbinden, um zu erkennen, dafs aus dem prismatischen Körper vier Halbtetraeder ausgeschnitten worden sind. Ganz Entsprechendes geschieht bei dem Prismatoid mit zwei verschiedenen, ganz beliebig gestalteten Grundflächen. Aus dem Prismatoid mit ebenen Seitenflächen sind Halbtetraeder in beliebiger Zahl ausgeschnitten.

Fig. 235.



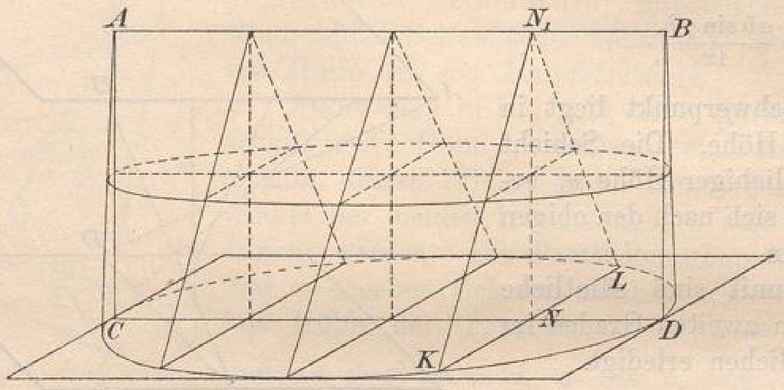
Daraus folgt, dafs die Querschnittsformel der Prismatoide den zweiten Grad nicht übersteigt, dafs also Inhalt und statisches Moment mit Hülfe der Simpsonschen Regel und ebenso mit Hülfe der Summenformel bestimmt werden können.

Die einmanteligen Hyperboloide sind als Prismatoide zu betrachten, deren Grundflächen regelmäfsige Polygone mit unendlich vielen Seiten oder entsprechende elliptische Polygone sind.

321) Zu den Prismatoiden gehören noch Formen, die man sich in beliebiger Zahl darstellen kann.

Ein Beispiel sei hier angegeben. Fig. 236 stellt einen Körper dar, dessen untere Grundfläche ein Kreis ist, während die obere Grundfläche durch eine Gerade AB dargestellt wird, deren Projektion der

Fig. 236.



Kreisdurchmesser CD ist. Die senkrecht zu CD stehenden Sehnen, z. B. KL, sind mit der oberen Projektion (z. B. N_1) ihres Halbierungspunktes N verbunden, so dafs Dreiecke wie KLN_1 entstehen. Die Schenkel dieser Dreiecke bilden eine krumme Fläche. Der Querschnitt in halber Höhe wird eine Ellipse, deren Inhalt die Hälfte vom Kreisinhalte ist.

Auch dieser Körper ist als Prismatoid zu betrachten, kann also nach der Simpsonschen Regel berechnet werden. Sein Inhalt ist

$$J = \frac{h}{6}\left(r^2\pi + 0 + 4\frac{r^2\pi}{2}\right) = \frac{r^2\pi h}{2},$$

also gleich der Hälfte des zugehörigen Cylinders, wie auch aus dem Vergleich der Dreiecke mit den zugehörigen Rechtecken des Cylinders folgt. Das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche ist

$$M = \frac{h}{6}\left[r^2\pi \cdot 0 + 0 \cdot h + 4\frac{r^2\pi}{2} \cdot \frac{h}{2}\right] = \frac{h^2}{3} r^2\pi,$$

die Schwerpunktshöhe also

$$h_s = \frac{M}{J} = \frac{2}{3} h,$$

wie auch sofort aus den Schwerpunkten der Dreiecksschnitte geschlossen werden kann.

Jeder Horizontalschnitt des Körpers ist eine Ellipse, die Ellipsen gehen nach oben hin aus der Kreisgestalt allmählich in die der Geraden über. Der Körper kann, wie der Kegel, nach oben hin fortgesetzt werden, ebenso nach unten.

322) Durch Horizontalverschiebung der Querschnitte erhält man den in Affinitätsbeziehung zum vorigen stehenden Schrägkörper.

Eine andere Transformation erhält man, wenn man statt der parallelen Schnittebenen (Dreiecke) solche nimmt, die (z. B. oberhalb AB) sich in einer Kante schneiden, die senkrecht zur Zeichnungsebene steht. Dadurch erhält man einen Körper, bei dem die Schneide $AB < CD$ ist, während der Parallelismus erhalten bleibt. Auch jetzt sind sämtliche Horizontalschnitte Ellipsen, denn jede Ellipse ist einer Centralprojektion unterworfen worden.

Eine weitere Umgestaltung erzielt man durch Drehung jedes Querschnittes in seiner Ebene, z. B. um den Mittelpunkt.

An diesem Beispiele erkennt man, welche grofse Mannigfaltigkeit im Gebiete der Prismatoide zu finden ist. Eine grofse Anzahl solcher Körper sind in der „Genetischen Stereometrie" von Heinze-Lucke (Leipzig, bei Teubner, 1886) behandelt worden. Die Schwerpunkte sämtlicher sind der elementaren Bestimmung mit Hülfe der Summenformel und der Simpsonschen Regel zugänglich, weil nirgends der 2. bzw. 3. Grad überstiegen wird.

323) Körper vom Querschnitt

$$q_y = a + by + cy^2 + \cdots + ky^p.$$

Nach Nr. 172 wird

$$J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \cdots + \frac{kh^{p+1}}{p+1},$$

$$M = \frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4} + \cdots + \frac{kh^{p+2}}{p+2},$$

folglich

$$h_s = \frac{\frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4} + \cdots + \frac{kh^{p+2}}{p+2}}{\frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \cdots + \frac{kh^{p+1}}{p+1}}.$$

Hier könnte noch durch h gekürzt werden, jedoch würde die Formel dadurch an Einfachheit verlieren.

Einige Beispiele sind früher gegeben worden, z. B. in der Tabelle über Parabeln höherer Ordnung.

324) Eine umfangreiche Gruppe von Drehungskörpern. Eine Kurve habe die Gleichung

$$x = a + by + cy^2 + \cdots + ky^p.$$

Durch Drehung um die Y-Achse entsteht ein Drehungskörper, dessen Querschnittsformel $q_y = x^2\pi$ auf die Form