Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Querschnitte höheren Grades.

322) Durch Horizontalverschiebung der Querschnitte erhält man den in Affinitätsbeziehung zum vorigen stehenden Schrägkörper.

Eine andere Transformation erhält man, wenn man statt der parallelen Schnittebenen (Dreiecke) solche nimmt, die (z. B. oberhalb AB) sich in einer Kante schneiden, die senkrecht zur Zeichnungsebene steht. Dadurch erhält man einen Körper, bei dem die Schneide $AB < CD$ ist, während der Parallelismus erhalten bleibt. Auch jetzt sind sämtliche Horizontalschnitte Ellipsen, denn jede Ellipse ist einer Centralprojektion unterworfen worden.

Eine weitere Umgestaltung erzielt man durch Drehung jedes Querschnittes in seiner Ebene, z. B. um den Mittelpunkt.

An diesem Beispiele erkennt man, welche grofse Mannigfaltigkeit im Gebiete der Prismatoide zu finden ist. Eine grofse Anzahl solcher Körper sind in der „Genetischen Stereometrie" von Heinze-Lucke (Leipzig, bei Teubner, 1886) behandelt worden. Die Schwerpunkte sämtlicher sind der elementaren Bestimmung mit Hülfe der Summenformel und der Simpsonschen Regel zugänglich, weil nirgends der 2. bzw. 3. Grad überstiegen wird.

323) Körper vom Querschnitt

$$q_y = a + by + cy^2 + \cdots + ky^p.$$

Nach Nr. 172 wird

$$J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \cdots + \frac{kh^{p+1}}{p+1},$$

$$M = \frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4} + \cdots + \frac{kh^{p+2}}{p+2},$$

folglich

$$h_s = \frac{\frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4} + \cdots + \frac{kh^{p+2}}{p+2}}{\frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \cdots + \frac{kh^{p+1}}{p+1}}.$$

Hier könnte noch durch h gekürzt werden, jedoch würde die Formel dadurch an Einfachheit verlieren.

Einige Beispiele sind früher gegeben worden, z. B. in der Tabelle über Parabeln höherer Ordnung.

324) Eine umfangreiche Gruppe von Drehungskörpern. Eine Kurve habe die Gleichung

$$x = a + by + cy^2 + \cdots + ky^p.$$

Durch Drehung um die Y-Achse entsteht ein Drehungskörper, dessen Querschnittsformel $q_y = x^2\pi$ auf die Form

$$q_y = a_1 + b_1 y + c_1 y^2 + \cdots + r_1 y^{2p}$$

gebracht werden kann, so dafs die Schwerpunktshöhe des Körpers wird

$$h_s = \frac{M_u}{J} = \frac{\frac{a_1 h^2}{2} + \frac{b_1 h^3}{3} + \frac{c_1 h^4}{4} + \cdots}{\frac{a_1 h}{1} + \frac{b_1 h^2}{2} + \frac{c_1 h^3}{3} + \cdots}.$$

Nach Nr. 116 ist aber zugleich

$$h_s = \frac{M_{xy}}{J} = \frac{M_{xy}}{M_y}$$

folglich

$$M_{xy} = h_s M_y = \frac{M_u M_y}{J} = \frac{M_u \cdot F\varrho}{2\varrho\pi F} = \frac{M_u}{2\pi}.$$

Darin liegt ein Mittel, für zahlreiche Flächen das Centrifugalmoment in Bezug auf die Koordinatenachsen bequem zu bestimmen.

Entsprechendes gilt von den Kurven, deren Gleichung lautet

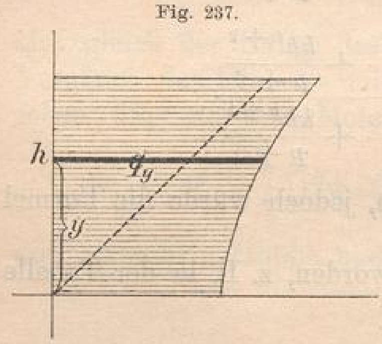
$$x^2 = a + by + cy^2 + \cdots + ky^p.$$

Der letzte Satz kann überhaupt für alle Flächen benutzt werden, bei denen aus irgend welchen Gründen (z. B. Symmetrie) die Schwerpunktshöhe des Drehungskörpers leicht bestimmt werden kann.

325) Beispiel der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.

Für den gezeichneten Quadranten ist das Centrifugalmoment mit Hülfe des Drehungskörpers folgendermafsen zu bestimmen. Moment des Streifens

Fig. 237.



$$m_u = y \cdot q_y = y \cdot x^2 \pi = \pi y (1 + y^2),$$

also

$$M_u = \frac{\pi h^2}{2} + \frac{\pi h^4}{4} = \frac{\pi h^2}{4}(2 + h^2).$$

Demnach

$$M_{xy} = \frac{M_u}{2\pi} = \frac{h^2}{8}(2 + h^2).$$

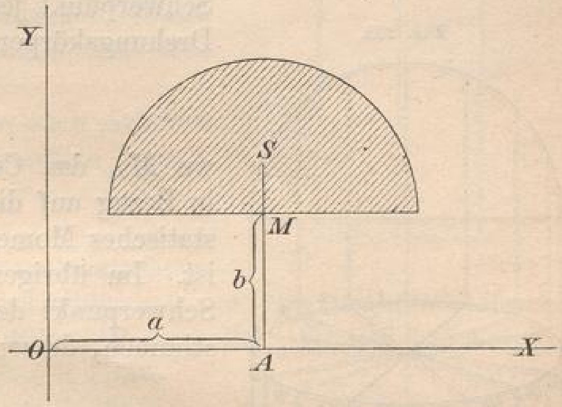
326) Beispiel des Halbkreises in dem Sonderfalle der Fig. 238.

Da die Symmetrieachse parallel der Drehungsachse ist, so ist nach Nr. 117 der Schwerpunkt des Drehungskörpers in der Höhe $b + \frac{4r}{3\pi}$ zu finden. Sein Inhalt ist $\frac{r^2\pi}{2} \cdot 2a\pi = a\pi^2 r^2$, also das Moment $M_u = (a\pi^2 r^2)\left(b + \frac{4r}{3\pi}\right)$, folglich

$$M_{xy} = \frac{a\pi^2 r^2 (3\,b\pi + 4\,r)}{2\,\pi \cdot 3\,\pi} = \frac{ar^2}{6}(3\,b\pi + 4\,r) \cdot$$

Im letzteren Falle war die Summenformel für ganze Exponenten nicht ohne weiteres brauchbar, denn die Kreisgleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ führt auf $x = a + \sqrt{r^2 - (y-b)^2}$, wobei rechts erst nach Potenzen von y in unendlicher Reihe entwickelt werden müfste.

Fig. 238.



Der gewonnene Satz über das Centrifugalmoment sagt nichts Neues, bietet aber doch für viele Flächen einen bequemen Weg zur Berechnung. Er gilt auch für die Fälle, wo x oder x^2 durch eine unendliche Reihe gegeben ist, sobald man nur im Konvergenzgebiete bleibt.

327) Negative und gebrochene Exponenten. Ist die Querschnittsgleichung von der Form

$$x = q_y = ay^\alpha + by^\beta + cy^\gamma + dy^\delta + \cdots,$$

wobei unter den Exponenten auch negative und gebrochene sind, so ist nach Abschnitt V. C (Nr. 179 bis 195) zu verfahren. Tritt in der Querschnittsformel für den Körper oder für sein statisches Moment der Exponent -1 auf, der als Ausnahmefall zu betrachten ist und auf den natürlichen Logarithmus führt, so ist einige Vorsicht nötig, denn der unendlich werdende Streifen darf nicht zu der Fläche gehören, die untersucht werden soll. Sind sämtliche Exponenten gröfser als -1, so kann der Körper von Null bis zu jeder beliebigen endlichen Höhe y berechnet werden. Kommen Exponenten vor, die kleiner als -1 sind, so darf nicht von Null ausgegangen werden, da dann der entsprechende Diagrammteil im allgemeinen unendlich grofs wird. Dagegen kann die Fläche zwischen einem endlichen y_1 und einem endlichen y_2 berechnet werden.

328) Irrationale und transcendente Querschnittsgleichungen können insoweit berücksichtigt werden, als die Entwickelung von q_y in unendliche Reihen möglich ist. Auch hierüber ist schon vorher, z. B. in Nr. 195, das Nötige mitgetheilt, jedoch kann auch der entsprechende Abschnitt in Band III des Method. Lehrbuchs verglichen werden. Bei der Anwendung der Summenformel erhält man Reihen, die man entweder zu geschlossenen Ausdrücken