UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Anwendungen der Schwerpunktslehre auf Stabilität, Auftrieb bei schwimmenden Körper, Pendel, einfache Maschinen, kosmische Massen u. dgl.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

Visual Library

$$y_s = \frac{\frac{1}{2}\sum f x^4}{\sum f x^2}.$$

Ähnlich ist es bei der Parabel $y = cx^2$.

Bei der Parabel $y = x^p$ handelt es sich um die Ausdrücke

$$\sum f x^p,\ \sum f x^{p+1},\ \sum f x^p y,\ \tfrac{1}{2}\sum f x^{2p}.$$

An diesen Beispielen erkennt man die Bedeutung der Flächenmomente höherer Ordnung.

Das Beispiel des regelrecht aufgestellten Rechteckskörpers, der in solcher Weise abgeschnitten ist, läfst sich an der Hand des Früheren bequem durchführen. Andere Grundrifsformen sind schwerer zu behandeln.

Das Abschneiden kann auch mit Hülfe eines Drehungsparaboloides p^{ter} Ordnung erfolgen, wobei Polarmomente höherer Ordnung auftreten.

Auf diesen Gegenstand, der nur theoretische Bedeutung hat, soll nicht näher eingegangen werden. Er bietet zahlreiche Übungsbeispiele für die höhere Analysis.

333) Anwendungen der Schwerpunktslehre.

a) In der Mechanik spielt der Schwerpunkt von Körpern eine hervorragende Rolle als Angriffspunkt eines Systems paralleler Kräfte, in ihm greift die Resultante der einzelnen Schwerkräfte an, und zwar für alle möglichen Stellungen des Körpers. Die elementare Theorie der einfachen Maschinen ist dort dadurch zu verfeinern, dafs der Einflufs des Gewichtes der einzelnen Teile mit eingerechnet wird. Ein interessantes Beispiel bietet in dieser Hinsicht die Untersuchung über die Empfindlichkeit der Wage. Dabei handelt es sich nicht nur um den statischen, sondern auch um den dynamischen Einflufs.

b) Die Stabilität von Mauern, d. h. der Widerstand gegen seitlichen Druck (Winddruck, Wasserdruck, Druck von Erdmassen, Druck von fehlerhaften Dachkonstruktionen, von Gewölben) hängt ab von dem Momente der im Schwerpunkte angreifenden Schwerkraft in Bezug auf die Kippkante der Mauer.

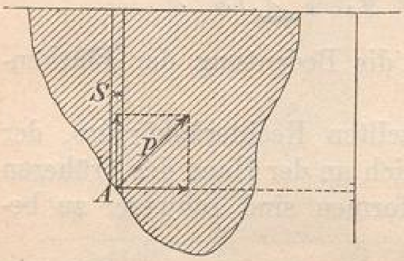
c) Die Untersuchungen über labiles, stabiles und indifferentes Gleichgewicht von sich drehenden, rollenden, schwimmenden Körpern beruhen auf der Schwerpunktstheorie. Die bei dem stabilen Zustande eintretenden Pendelschwingungen und ähnliche Erscheinungen erfordern die Kenntnis derselben Theorie.

d) In den Lehrbüchern der Mechanik werden die Sätze über den Angriffspunkt des Auftriebs bei schwimmenden Körpern

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

vielfach falsch angegeben, indem der Angriffspunkt in vollem Widerspruch zu den Hebelgesetzen einfach in den Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse gelegt wird. Die Korrektur ergiebt sich aus Folgendem: Der Druck p bei der Stelle A in Fig. 244 zerlegt sich in einen Seitendruck und einen Auftrieb. Der erstere ist gleich dem Drucke gegen die entsprechende Wandprojektion des Flächenteilchens, der letztere gleich dem Gewichte der verdrängten Wassersäule. Der Angriffspunkt A liegt aber doppelt so tief, wie der Schwerpunkt der Wassersäule. Da dies für alle Säulchen gilt, so liegt der Angriffspunkt des Auftriebs im Falle der Fig. 244 senkrecht unter dem Schwerpunkte der verdrängten Wassermasse und zwar in doppelter Tiefe. (Darin liegt eine Anwendung des Prinzips von Cavalieri versteckt.)

Fig. 244.



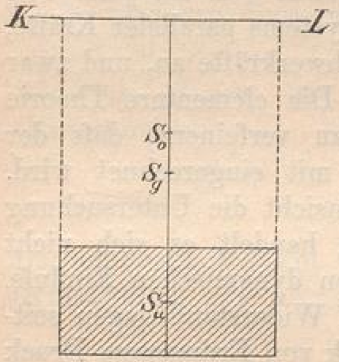
Ist der Körper vollständig untergetaucht, so findet dasselbe statt. Ist nämlich in Fig. 245 S_u der Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse, S_o der Schwerpunkt der darüber schwebenden Wassermasse, S_g der Schwerpunkt des Gesamtraums, und sind J_u, J_o und J_g die entsprechenden Räume, so ist in Bezug auf die Niveaufläche KL das gesamte statische Moment gleich der Summe der Einzelmomente, d. h. (wenn die Schwerpunktstiefen mit t_u, t_o und t_g bezeichnet werden)

$$J_g t_g = J_o t_o + J_u t_u,$$

demnach ist die Schwerpunktstiefe der verdrängten Wassermasse

$$1) \qquad t_u = \frac{J_g t_g - J_o t_o}{J_u}.$$

Fig. 245.



Dies gilt für jede Gestalt und Lage des untergetauchten Körpers, auch kann dabei $S_o S_u$ eine schräge Gerade sein.

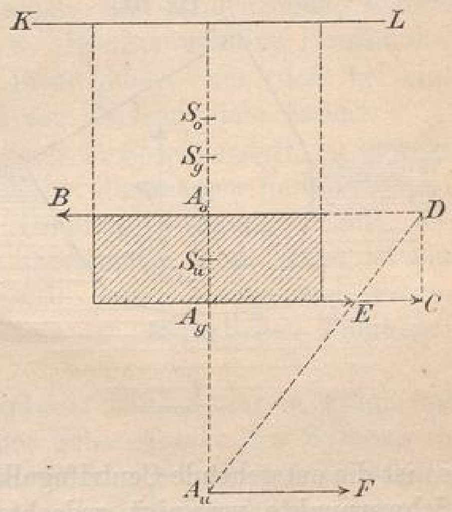
Die Auftriebsverhältnisse gestalten sich nun folgendermafsen. Nach unten drückt den Körper die Wassermasse des Raums J_o, nach oben drückt ihn die dem Gesamtraume J_g entsprechende Wassermasse. Die Resultante beider Kräfte ist $J_g - J_o = J_u$. Nun liegt der Angriffspunkt A_o doppelt so tief wie S_o, also in der Tiefe $2\,t_o$; der Angriffspunkt A_g liegt ebenso in der Tiefe $2\,t_g$. Die beiden Kräfte sind entgegengesetzte, der Angriffspunkt bleibt nach bekanntem Satze derselbe,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

wenn man die Richtungen der Kräfte ändert, wenn sie nur entgegengesetzte bleiben. In der Fig. 246 sind die Kräfte der Deutlichkeit halber in horizontale Lage gedreht worden. Dort stelle $\overline{A_o B}$ die Kraft J_o, $\overline{A_g C}$ die Kraft J_g vor. Macht man dann $\overline{A_o D} = \overline{A_g C}$ und $\overline{A_g E} = -\overline{A_o B}$, dann giebt DE auf $A_o A_g$ den Schnittpunkt A_u als den Angriffspunkt der Resultante. Dabei muſs nach dem Gesetz der statischen Momente in Bezug auf KL sein

$$J_g \cdot 2\,t_g - J_o \cdot 2\,t_o = J_u \cdot t_u .$$

Fig. 246.



Demnach ist die Tiefe

$$2)\qquad t_u = \frac{2\,(J_g t_g - J_o t_o)}{J_u},$$

d. h. das Doppelte von der Tiefe des Punktes S_u.

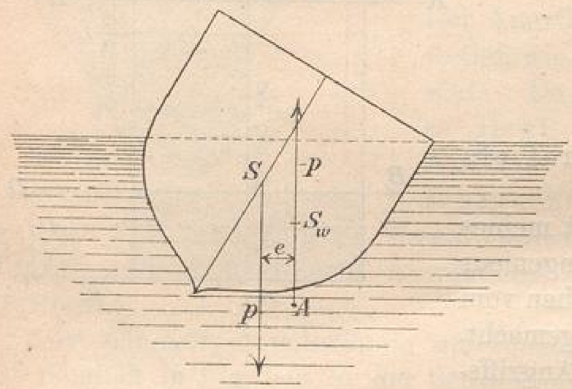
(Auf diesen Umstand hat meines Wissens zuerst Herr Ingenieur H. Hädicke in einem Schriftchen vom Jahre 1881 aufmerksam gemacht, welches unter dem Titel „der Angriffspunkt des Auftriebs" bei Orell und Füssli in Zürich erschienen ist. Die hier gegebene Darlegung ist allerdings einfacher und kürzer.)

$\overline{A_u F} = J_u$ stellt die Resultante dar. Bringt man sie in A_u entgegengesetzt an, so herrscht zwischen den Kräften $\overline{A_o B}$, $\overline{A_g C}$ und $-\overline{A_u F}$ Gleichgewicht. Die Resultante ist senkrecht nach oben gerichtet zu denken.

Der horizontale Seitendruck gegen den Körper ist in jeder Richtung genommen gleich Null. Er besteht aus zwei gleichen und entgegengesetzten Komponenten, deren Gröſse man folgendermaſsen findet. Man projiziere den Körper auf eine senkrechte Wand, die zugleich senkrecht gegen die gewählte Richtung liegt (z. B. auf eine der senkrechten Koordinatenebenen). Der eine Teil des Seitendrucks ist dann gleich dem statischen Momente M_0 der Projektionsfläche in Bezug auf die Wasseroberfläche, der Angriffspunkt liegt in der Tiefe $\frac{T_0}{M_0}$, wo T_0 das Trägheitsmoment, M_0 das statische Moment der Fläche in Bezug auf die Wasseroberfläche ist. Die andere Koordinate wird mittels der Formel $\frac{M_{xy}}{M}$ gefunden, wo M_{xy} das Centrifugalmoment der Projektionsfläche in Bezug auf den Schnitt der Wasserfläche und der senkrechten Koordinatenebene ist. (Vgl. Nr. 113.) Jetzt ist die Lage und Gröfse der betreffenden Druckresultante genau bestimmt. Die andere ist ihr entgegengesetzt und gleich grofs, die Summe beider also Null. Das Gesagte gilt für jede beliebige Gestalt. Damit ist die Statik untergetauchter Körper erledigt.

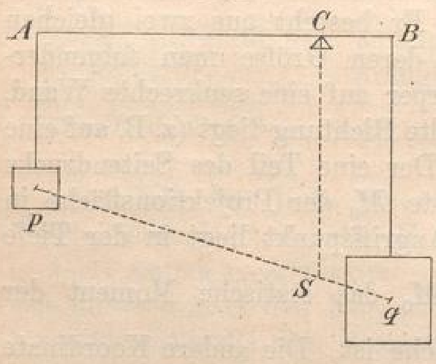
e) Stabilität eines Schiffskörpers in schräger Lage. Ist S der Schwerpunkt des Schiffskörpers, p das gesamte Gewicht des Schiffes, so ist der Auftrieb nach Archimedes gleich $-p$. Ist S_w der Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse, so liegt der Angriffspunkt A des Auftriebs doppelt so tief. Das Moment des Kräftepaares ist für diese Lage des Schiffes gleich pe. Da es ein aufrichtendes ist, kann das Schiff noch einen Winddruck vom Momente $-pe$ aushalten, ohne zu kentern.

Fig. 247.



f) Dreht sich ein Körper um eine beliebige Achse, so ist die entstehende Centrifugalkraft gleich der Centrifugalkraft der im Schwerpunkte vereinigt gedachten Masse. Im allgemeinen greift sie aber in einem anderen Punkte an und giebt für jeden Punkt der Achse ein bestimmtes Centrifugalmoment. In der Regel zerlegt man die gesamte Centrifugalwirkung in eine im Schwerpunkte angreifende Kraft und in ein Kräftepaar, dessen Ebene besonders konstruiert werden mufs (vgl. Fig. 101 für den Fall ungleicher Kräfte). Die drei Hauptachsen des Centralellipsoids sind freie Umdrehungsachsen. Das Problem kann also nur mit Hülfe der körperlichen Trägheitsmomente zum Abschlufs gebracht werden. — Über die Centrifugalkraft, die einen um seine Achse drehenden Rotationskörper zerreifsen will, vgl. Nr. 49.

Fig. 248.



g) Wird ein physisches Pendel vom Gewicht p aus der Ruhelage gebracht und hebt sich dabei sein Schwerpunkt um h, so ist die geleistete Arbeit gleich $p \cdot h$. (Läfst man es in die Ruhelage zurückschwingen, so wird der tiefste Punkt mit einer Drehungsgeschwindigkeit passiert, die sich aus

$T\frac{\vartheta^2}{2} = ph$ als $\vartheta = \sqrt{\frac{2ph}{T}}$ berechnen läfst. Die Schwingungsdauer ist $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, wo $l = \frac{T}{M}$ ist.)

h) Ist ein Hebel AB durch Lasten p und q ins Gleichgewicht versetzt und dreht man ihn um C, so bleibt der Schwerpunkt S beider Lasten in derselben Höhe. Entsprechendes gilt vom Gleichgewichtszustande anderer einfacher oder zusammengesetzter Maschinen, z. B. Rad und Welle, alle Arten von Flaschen- und Rollenzügen, schiefe Ebenen, Schraubenmechanismen u. s. w. Hierher gehören Fragen des indifferenten Gleichgewichtes. Dazu gehört eben, dafs bei eintretender Bewegung der Schwerpunkt sein Niveau nicht ändert.

i) Wird ein Körper durch einen Stofs fortgeschleudert, so bewegt sich sein Schwerpunkt in einer Parabel (im allgemeinen Falle in einem Kegelschnitte) und aufserdem finden Drehungsbewegungen statt, die mit Hülfe der Trägheitsmomente zu untersuchen sind. Dies ist ein Fall des sogenannten Schwerpunktprinzips. Zur Lehre vom excentrischen Stofse ist ebenfalls die Kenntnis der körperlichen Trägheitsmomente nötig.

k) Bewegen sich zahlreiche kosmische Massen nur in Folge der gegenseitigen Anziehung, so bleibt der Schwerpunkt des Systems in Ruhe. Wurde vorher jeder Masse ein Stofs gegeben, so bewegt sich der Schwerpunkt des Systems in gerader Linie. Handelt es sich nur um zwei Körper, so bewegt sich der Schwerpunkt in gerader Linie und beide Körper drehen sich in Ellipsen um den Schwerpunkt des Systems (allgemeiner in Kegelschnitten).

l) Dafs in der Theorie der Gewölbe der Körperschwerpunkt eine wichtige Rolle spielt, ist selbstverständlich. Dasselbe gilt noch von vielen anderen Lehren der Mechanik, auf die jetzt nicht eingegangen werden soll. Über die Flächenschwerpunkte sei noch folgendes gesagt:

m) Bei Schiefsversuchen gilt der Schwerpunkt sämtlicher Treffpunkte als mittlerer Treffpunkt. Bei den Untersuchungen über die Abweichung rotierender Langgeschosse wird er zu Grunde gelegt.

n) Soll bei einer Gleichung n^{ten} Grades durch eine Substitution das zweite Glied entfernt werden, so handelt es sich um eine Verlegung des Nullpunktes des Koordinatensystems nach dem Schwerpunkte der Wurzelpunkte, mögen diese nun reell oder imaginär sein. (Die Gleichung darf auch komplexe Koeffizienten haben.)

o) Strömt in n Punkten einer sehr grofsen Platte Elektrizität in den Quantitäten $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ ein, und wird sie in grofser Entfernung abgeleitet, so gehen die Asymptoten der Stromlinien durch den Schwerpunkt der mit dem Gewichte $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ zu belegenden Einströmungspunkte.