Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 22. Theorie vom Schwerpunkte.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

usw. Heißen die einzelnen parallelen Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ und sind die Abstände ihrer Angriffspunkte von der Momentenachse $p_1, p_2 \ldots p_n$, so gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} P_1 p_1 + P_2 p_2 &= R_1 r_1 \\ R_1 r_1 + P_3 p_3 &= R_2 r_2 \\ \vdots \qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ R_{n-1} r_{n-1} + P_n p_n &= R \cdot r \end{aligned}$$

Durch Addition auf beiden Seiten ergibt sich

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n + R_1 r_1 + \ldots + R_{n-1} r_{n-1}$$
$$= R_1 r_1 + \ldots R_{n-1} r_{n-1} + R \cdot r,$$

oder $P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = R \cdot r$, d. h.

$$\boldsymbol{R \cdot r = \Sigma (P \cdot p)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

„Die Summe der statischen Momente mehrerer parallelen Einzelnkräfte in bezug auf eine Momentenebene oder eine Momentenachse ist gleich dem statischen Momente der Resultierenden in bezug auf diese Momentenebene oder Momentenachse.“ —

§ 22. Theorie vom Schwerpunkte.

In den einzelnen Punkten einer materiell gedachten Linie, Fig. 65, wirken deren Gewichte vertikal nach abwärts. Es ist also eine Reihe von parallelen Kräften vorhanden. Dieselben ergeben eine Resultierende, deren Größe nach früherem gleich ist der Summe der Einzelnkräfte, also gleich dem Totalgewichte der materiellen Linie. Ihr Angriffspunkt liegt in einem bestimmten Punkte der Linie $\overline{AB}$ und zwar, wenn dieselbe überall homogen ist, in deren Mittelpunkte. Die Linie $\overline{AB}$ würde also im Gleichgewichte bleiben, wenn man sie in genanntem Angriffspunkte der Resultierenden S festmachen würde.

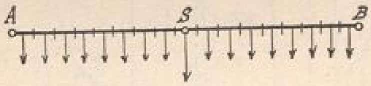

Fig. 65.

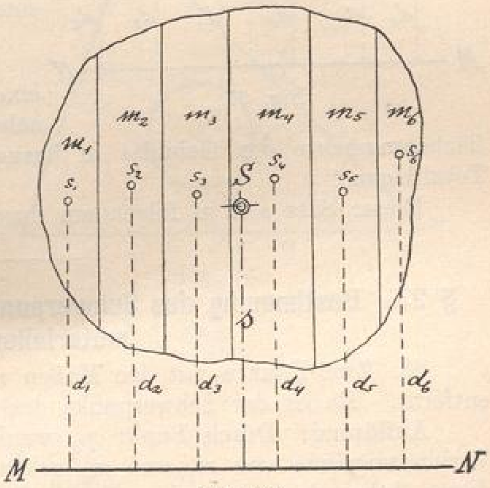

Fig. 66.

„Man nennt den Angriffspunkt der Resultierenden aller Gewichte der materiellen Teilchen eines Gebildes den **Schwerpunkt** desselben.“

„Jede durch den Schwerpunkt eines Gebildes gehende Gerade heißt **Schwerlinie.** Dieselbe ist oft auch eine Symmetrielinie.“

Eine ebene Fläche kann man in unendlich viele schmale Streifchen zerlegen, deren jedes als eine materielle Linie aufzufassen ist, Fig. 66. Jedes derselben besitzt nun einen Mittelpunkt, in welchem deren Gewicht vertikal nach abwärts wirkt. Nun gibt es eine

Totalresultierende aller Teilresultierenden mit einem bestimmten Angriffspunkt. Würde das ebene Gebilde in letzteren unterstützt werden, so wäre es im Gleichgewicht.

Um die Lage des Schwerpunktes einer Fläche zu berechnen, teile man sie also in eine unendlich große Zahl von Streifen ein und beziehe die Momente ihrer Gewichte auf eine Momentenachse, welche irgend eine Gerade sein kann, die mit der Fläche in einer Ebene liegt. Die Summe der statischen Momente aller Teilmassen in bezug auf diese Momentenachse muß dann dem statischen Momente der ganzen Masse in bezug auf sie sein. — Sind die Massenteilchen der Reihe nach m_1, m_2 . . . und deren Abstände von der Achse d_1, d_2 . . ., so wird

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 + \dots + m_n d_n = M \cdot s$$

und hieraus

$$s = \frac{\Sigma(m \cdot d)}{M} \dots \dots \dots \quad (49)$$

„Die Entfernung des Schwerpunktes von der Momentenachse einer Fläche ist gleich der Summe der statischen Momente aller einzelnen Teilmassen der Fläche in bezug auf diese Achse dividiert durch die Totalmasse der Fläche."

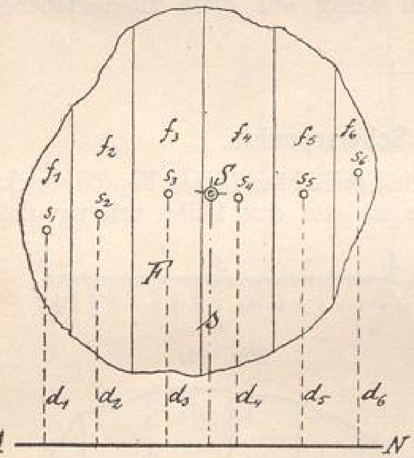

Fig. 67.

Ist die Masse der Flächeneinheit nun δ und die Fläche gleichmäßig mit Masse belegt gedacht, so hat die beliebige Fläche f die Masse $f \cdot \delta$.

Bedeuten nun f_1, f_2 . . . . die Flächenteilchen eines Gebildes (Fig. 67), so sind die Massen derselben $m_1 = f_1 \delta$, $m_2 = f_2 \delta$ . . .

Die Größen der Massen m_1, m_2 . . . . in die Gleichung der statischen Momente substituiert, folgt

$$f_1 \delta \cdot d_1 + f_2 \cdot \delta \cdot d_2 + \dots = F \cdot \delta \cdot s$$

somit

$$s = \frac{\Sigma(fd)}{F} \dots \quad (50)$$

„Die Entfernung des Schwerpunktes eines ebenen Gebildes von einer Momentenachse ist gleich der Summe der Teilflächenmomente des Gebildes in bezug auf dieselbe dividiert durch dessen Totalfläche."

Dieser Satz soll in folgendem durch einige Beispiele eingeübt werden.

§ 23. Bestimmung des Schwerpunktes von Punktsystemen und von materiellen Linien.

88. Zwei Punkte mit den Maßen m_1 und m_2 liegen l Meter voneinander entfernt. Es ist der Schwerpunkt des Punktsystems zu suchen.

Auflösung: Durch Punkt m_1 werde eine Momentenachse senkrecht zur Verbindungslinie von m_1 und m_2 gelegt. Hat nun der Schwerpunkt S von dieser Achse den Abstand x, dann gilt

$$(m_1 + m_2) \cdot x = m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot l$$

$$x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$$