Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 23. Bestimmung des Schwerpunktes und von materiellen Lienien. Beispiele 88-94

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Totalresultierende aller Teilresultierenden mit einem bestimmten Angriffspunkt. Würde das ebene Gebilde in letzteren unterstützt werden, so wäre es im Gleichgewicht.

Um die Lage des Schwerpunktes einer Fläche zu berechnen, teile man sie also in eine unendlich große Zahl von Streifen ein und beziehe die Momente ihrer Gewichte auf eine Momentenachse, welche irgend eine Gerade sein kann, die mit der Fläche in einer Ebene liegt. Die Summe der statischen Momente aller Teilmassen in bezug auf diese Momentenachse muß dann dem statischen Momente der ganzen Masse in bezug auf sie sein. — Sind die Massenteilchen der Reihe nach m_1, m_2 . . . und deren Abstände von der Achse d_1, d_2 . . ., so wird

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 + \ldots + m_n d_n = M \cdot s$$

und hieraus

$$s = \frac{\Sigma (m \cdot d)}{M} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

„Die Entfernung des Schwerpunktes von der Momentenachse einer Fläche ist gleich der Summe der statischen Momente aller einzelnen Teilmassen der Fläche in bezug auf diese Achse dividiert durch die Totalmasse der Fläche."

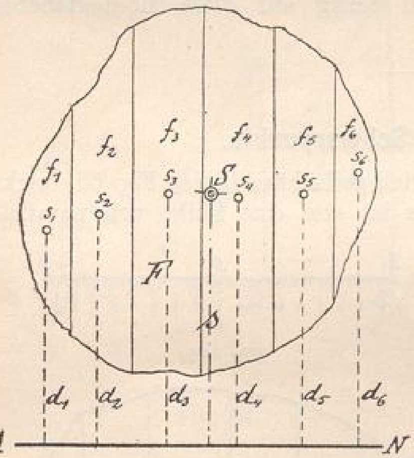

Fig. 67.

Ist die Masse der Flächeneinheit nun δ und die Fläche gleichmäßig mit Masse belegt gedacht, so hat die beliebige Fläche f die Masse $f \cdot \delta$.

Bedeuten nun f_1, f_2 . . . . die Flächenteilchen eines Gebildes (Fig. 67), so sind die Massen derselben $m_1 = f_1 \delta$, $m_2 = f_2 \delta \ldots$

Die Größen der Massen m_1, m_2 . . . . in die Gleichung der statischen Momente substituiert, folgt

$$f_1 \delta \cdot d_1 + f_2 \cdot \delta \cdot d_2 + \ldots = F \cdot \delta \cdot s$$

somit

$$s = \frac{\Sigma (f d)}{F} \quad \ldots \quad (50)$$

„Die Entfernung des Schwerpunktes eines ebenen Gebildes von einer Momentenachse ist gleich der Summe der Teilflächenmomente des Gebildes in bezug auf dieselbe dividiert durch dessen Totalfläche."

Dieser Satz soll in folgendem durch einige Beispiele eingeübt werden.

§ 23. Bestimmung des Schwerpunktes von Punktsystemen und von materiellen Linien.

88. Zwei Punkte mit den Maßen m_1 und m_2 liegen l Meter voneinander entfernt. Es ist der Schwerpunkt des Punktsystems zu suchen.

Auflösung: Durch Punkt m_1 werde eine Momentenachse senkrecht zur Verbindungslinie von m_1 und m_2 gelegt. Hat nun der Schwerpunkt S von dieser Achse den Abstand x, dann gilt

$$(m_1 + m_2) \cdot x = m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot l$$

$$x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$$

89. Wo liegt der Schwerpunkt von Erde und Mond, wenn die Masse der ersteren 80mal so groß ist wie die des letzteren und beide Himmelskörper den Abstand von 60 Erdradien haben?

Auflösung: $$x = \frac{m_2 \cdot l}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot l}{81 m_2} = \frac{81}{l}$$

$$x = \frac{l}{81}.$$

Der Schwerpunkt liegt in $\frac{1}{81}$ der Entfernung beider Himmelskörper von der Erde aus gerechnet.

90. Der Schwerpunkt eines Systems von drei materiellen Punkten ist aufzusuchen. Fig. 68.

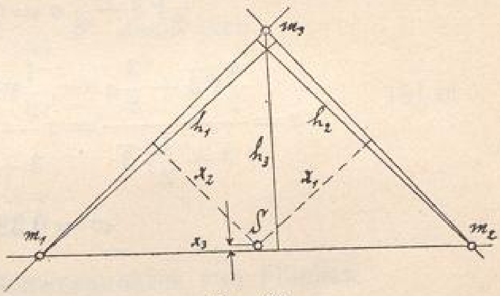

Fig. 68.

Auflösung: Ist die Momentenachse $m_1 m_2$, dann gilt

$$(m_1 + m_2 + m_3)\, x_3 = m_3 h_3$$

$$x_3 = \frac{m_3}{\Sigma(m)} \cdot h_3$$

$$x_2 = \frac{m_2}{\Sigma(m)} \cdot h_2$$

$$x_1 = \frac{m_1}{\Sigma(m)} \cdot h_1.$$

91. In dem in Fig. 69 gezeichneten Liniengebilde den Schwerpunktsabstand x zu finden.

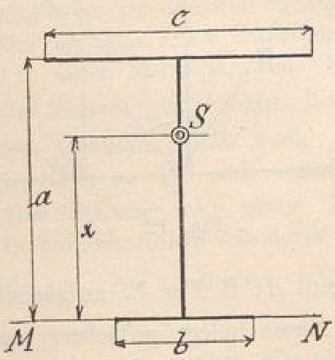

Fig. 69.

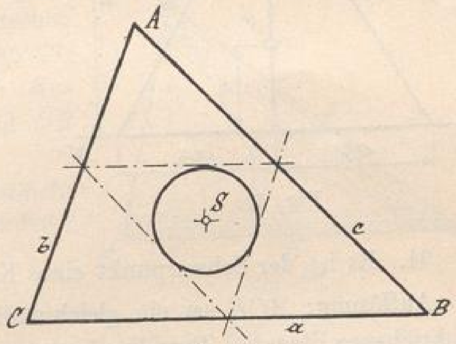

Fig. 70.

Auflösung: $$a \cdot c + \frac{a \cdot a}{2} + b \cdot 0 = (a + b + c) \cdot x$$

$$\frac{a}{2} \cdot (a + 2c) = (a + b + c) \cdot x$$

$$x = \frac{a}{2} \cdot \frac{a + 2c}{a + b + c}$$

92. Der Schwerpunkt eines Dreieckumfanges ist zu suchen. Fig. 70.

Auflösung: Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten sind die Schwerpunkte derselben. Daher sind deren Verbindungslinien Schwerlinien. Der Schwerpunkt des Dreieckumfangs ist demnach der Mittelpunkt des Kreises, welcher dem aus letzteren Schwerlinien gebildeten Dreiecke eingeschrieben ist.

93. Der Schwerpunkt eines Linienzuges, welcher aus den Seiten eines gleichseitigen Dreieckes und aus dessen Höhe gebildet ist, soll gesucht werden. Gegeben die Dreieckseite a. Fig. 71.

Auflösung: Die Schwerpunkte der Schenkel sind um $\frac{h}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$ von der Achse $\overline{MN}$ entfernt.

$$a \cdot 0 + 2a \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} + \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} = (3a + \frac{a}{2}\sqrt{3}) \cdot x$$

$$\frac{a}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{8}a = (3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) \cdot x$$

$$x = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{8}a}{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = a\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{8}}{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{a}{4} \cdot \frac{3 + 4\sqrt{3}}{6 + \sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{x = 0{,}321\, a.}$$

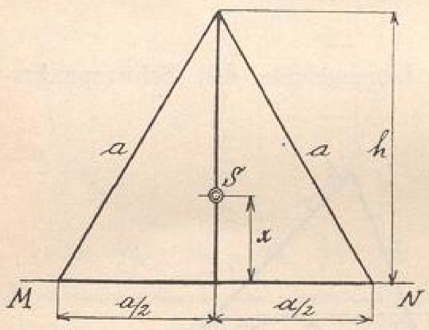

Fig. 71.

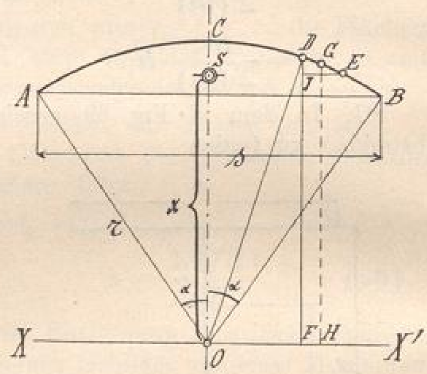

Fig. 72.

94. Es ist der Schwerpunkt eines Kreisbogens ACB, Fig. 72, aufzusuchen.

Auflösung: ACB sei ein gleichmäßig mit Masse belegt gedachter, aus O beschriebener Bogen. Derselbe kann aus lauter unendlich kleinen Elementen DE zusammengesetzt gedacht werden. In bezug auf die Momentenachse $\overline{XX'}$ ist dann das statische Moment von DE gleich $\overline{DE} \cdot \overline{DF}$ (eigentlich $\overline{DE} \cdot \overline{GH}$, aber wegen der Kleinheit von DE kann statt $\overline{GH} \ldots \overline{DF}$ gesetzt werden).

Da $\triangle DEJ \sim \triangle DOF$ ist, wird $\overline{DE} : \overline{EJ} = \overline{OD} : \overline{DF}$, d. h.

$$\overline{DE} \cdot \overline{DF} = \overline{OD} \cdot \overline{EJ}$$

Die Summe der statischen Momente aller Kreisteilchen in bezug auf $\overline{XX'}$ ist

$$\Sigma(\overline{DE} \cdot \overline{DF}) = \Sigma(\overline{OD} \cdot \overline{EJ}) = \overline{OD} \cdot \Sigma(\overline{EJ}) = r \cdot \Sigma(\overline{EJ})$$

$$\Sigma(EJ) = \overline{AB} = s$$

Ist der Abstand des Schwerpunktes S von $XX' \ldots x$, dann folgt, wenn der Bogen ACB kurz mit b bezeichnet wird,

$$b \cdot x = r \cdot s \quad \text{oder}$$

$$x = \frac{r \cdot s}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51\,\text{a})$$

Ist bloß r und ferner der Winkel α gegeben, dann wird wegen $b = 2 \cdot r \cdot \widehat{\alpha}$ und $s = 2\,r\,\sin\alpha$

$$x = \frac{r \cdot 2r \sin\alpha}{2r \cdot \widehat{\alpha}}$$

$$x = \frac{r \cdot \sin\alpha}{\widehat{\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51\,\text{b})$$

Nun $\widehat{\alpha} : \alpha^0 = \pi : 180^0$, daher $\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^0$, somit auch

$$x = \frac{180}{\pi} \cdot r \frac{\sin\alpha}{\alpha^0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51\,\text{c})$$

---

§ 24. Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen.

95. Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche ist zu finden.

Auflösung: In Fig. 73 ist die Höhe h in unendlich viele Teile geteilt und durch die Teilpunkte sind Parallele zur Grundlinie $\overline{AC}$ gezogen. Die Dreiecksfläche ist dadurch in lauter homogene Strecken zerlegt. Die Schwerpunkte derselben liegen in deren Mittelpunkten. Der geometrische Ort letzterer ist die Mittellinie $\overline{BF}$. Aus gleichen Gründen sind auch $\overline{AD}$ und $\overline{CE}$ Schwerlinien, so daß sich ergibt:

„Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche liegt im Schnittpunkte von deren Mittellinien.“

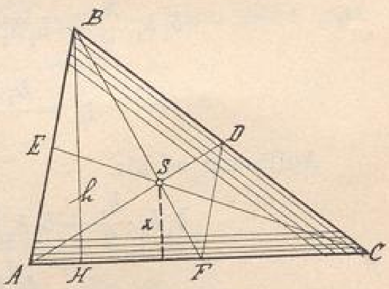

Fig. 73.

Da $\quad \overline{DF} \parallel \overline{AB}$ ist, folgt

$$\overline{DF} : \overline{AB} = 1 : 2$$

Das Verhältnis $\overline{SF} : \overline{SB}$ ist gleich dem Verhältnis $\overline{DF} : \overline{AB}$, somit wird

$$\overline{SF} : \overline{SB} = 1 : 2$$

$$(\overline{SF} + \overline{SB}) : \overline{SF} = (1 + 2) : 1 \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{\overline{SF} : \overline{BF} = 1 : 3.}$$

Ebenso ergeben sich $\quad \overline{SD} : \overline{AD} = 1 : 3$ und

$$\overline{SE} : \overline{CE} = 1 : 3, \quad \text{d. h.:}$$

Der Schwerpunkt hat von der Grundlinie den Abstand

$$x = \frac{h}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$