Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 24. Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen. Beispiele 95-105

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Ist der Abstand des Schwerpunktes S von $XX' \ldots x$, dann folgt, wenn der Bogen ACB kurz mit b bezeichnet wird,

$$b \cdot x = r \cdot s \quad \text{oder}$$

$$x = \frac{r \cdot s}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(51a)}$$

Ist bloß r und ferner der Winkel α gegeben, dann wird wegen $b = 2 \cdot r \cdot \widehat{\alpha}$ und $s = 2r \sin \alpha$

$$x = \frac{r \cdot 2r \sin \alpha}{2r \cdot \widehat{\alpha}}$$

$$x = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\widehat{\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(51b)}$$

Nun $\widehat{\alpha} : \alpha^0 = \pi : 180^0$, daher $\widehat{\alpha} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^0$, somit auch

$$x = \frac{180}{\pi} \cdot r \frac{\sin \alpha}{\alpha^0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(51c)}$$

§ 24. Bestimmung des Schwerpunktes von Flächen.

95. Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche ist zu finden.

Auflösung: In Fig. 73 ist die Höhe h in unendlich viele Teile geteilt und durch die Teilpunkte sind Parallele zur Grundlinie $\overline{AC}$ gezogen. Die Dreiecksfläche ist dadurch in lauter homogene Strecken zerlegt. Die Schwerpunkte derselben liegen in deren Mittelpunkten. Der geometrische Ort letzterer ist die Mittellinie $\overline{BF}$. Aus gleichen Gründen sind auch $\overline{AD}$ und $\overline{CE}$ Schwerlinien, so daß sich ergibt:

„Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche liegt im Schnittpunkte von deren Mittellinien."

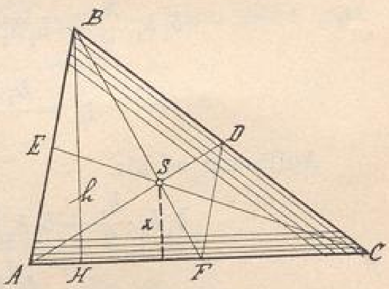

Fig. 73.

Da $\quad \overline{DF} \parallel \overline{AB}$ ist, folgt

$$\overline{DF} : \overline{AB} = 1 : 2$$

Das Verhältnis $\overline{SF} : \overline{SB}$ ist gleich dem Verhältnis $\overline{DF} : \overline{AB}$, somit wird

$$\overline{SF} : \overline{SB} = 1 : 2$$

$$(\overline{SF} + \overline{SB}) : \overline{SF} = (1 + 2) : 1 \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{\overline{SF} : \overline{BF} = 1 : 3.}$$

Ebenso ergeben sich $\quad \overline{SD} : \overline{AD} = 1 : 3$ und

$$\overline{SE} : \overline{CE} = 1 : 3, \quad \text{d. h.:}$$

Der Schwerpunkt hat von der Grundlinie den Abstand

$$x = \frac{h}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(52)}$$

96. Die Schwerpunkte der in den Fig. 74a bis 74d gezeichneten Flächen zu bestimmen.

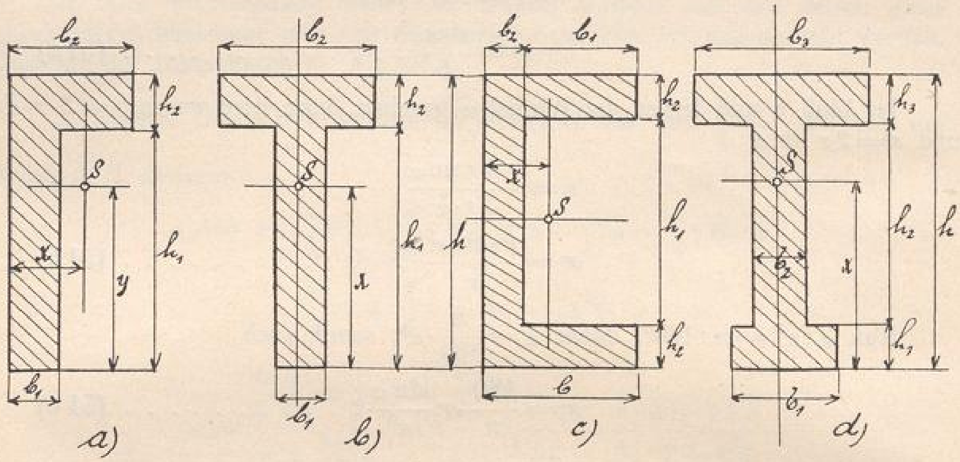

Fig. 74.

Auflösung ad a):

$$h_1 b_1 \cdot \frac{b_1}{2} + b_2 h_2 \cdot \frac{b_2}{2} = (b_1 h_1 + b_2 h_2) \cdot x$$

$$x = \frac{b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

$$b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) = (b_1 h_1 + b_2 h_2) \cdot y$$

$$y = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

Auflösung ad b):

$$b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \left(\frac{h_2}{2} + h_1\right) = (b_1 h_1 + b_2 h_2) \cdot x$$

$$x = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}$$

Auflösung ad c):

$$2h_2 b \cdot \frac{b}{2} + h_1 b_2 \frac{b_2}{2} = (h_1 b_2 + 2h_2 b) \cdot x$$

$$x = \frac{2b^2 h_2 + b_2^2 h_1}{2(2bh_2 + h_1 b_2)}$$

Auflösung ad d):

$$b_1 h_1 \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \left(\frac{h_2}{2} + h_1\right) + b_3 h_3 \left(h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2}\right) = (b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)\, x$$

$$x = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2) + b_3 h_3 (2h_1 + 2h_2 + h_3)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)}$$

97. Schwerpunkt eines Trapezes.

a) Auflösung auf dem Wege der Rechnung. Fig. 75.

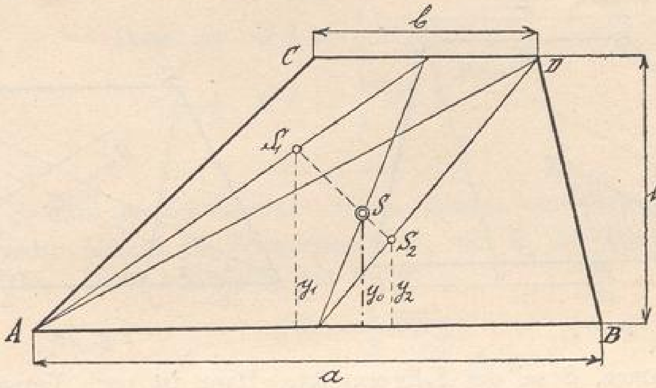

Fig. 75.

$$F \cdot y_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

$$h \cdot \frac{a+b}{2} \cdot y_0 = \frac{b\,h}{2} \cdot \frac{2}{3} h + \frac{a\,h}{2} \cdot \frac{h}{3}$$

$$(a+b) \cdot y_0 = \frac{h}{3}(a+2b)$$

$$\boldsymbol{y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(53)}$$

b) Auflösung auf konstruktivem Wege. Fig. 76.

Man mache $\overline{BH} = \overline{AJ} = b$ und $\overline{CK} = \overline{DG} = a$. — Dann ziehe man

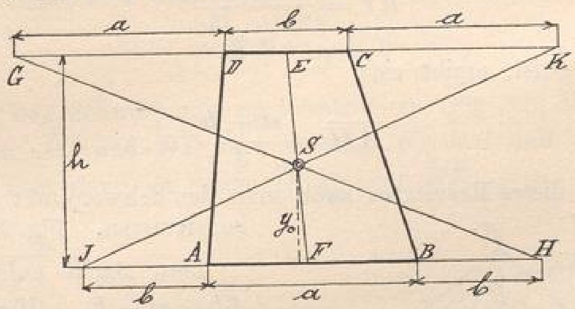

Fig. 76.

$\overline{HG}$ und $\overline{JK}$, so ist der Schnittpunkt letzterer Linien der gesuchte Schwerpunkt.

Beweis:

$$\triangle SEG \sim \triangle SFH$$

$$\overline{SF} : \overline{SE} = \overline{FH} : \overline{EG}$$

$$\overline{SF} : \overline{SE} = \left(\frac{a}{2} + b\right) : \left(\frac{b}{2} + a\right)$$

$$\overline{SF} : \overline{SE} = (a + 2b) : (b + 2a)$$

$$\overline{SF} : (\overline{SE} + \overline{SF}) = (a + 2b) : (3a + 3b)$$

$$y_0 : h = (a + 2b) : 3(a + b)$$

$$y_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b},$$ was zu beweisen war.

c) Verfahren von G. Lang und R. Land. (S. Riga'sche Industriezeitung, Jahrgang 1883, Seite 26.) — Fig. 77.

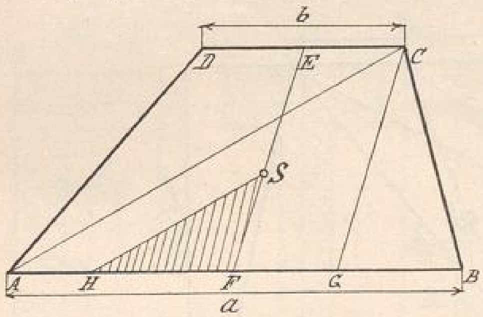

Fig. 77.

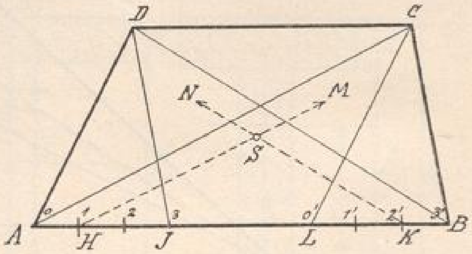

Fig. 78.

Angenommen, S sei der Schwerpunkt. Dann ist nach Vorigem

$$\overline{SF} : \overline{FE} = (2b + a) : (3a + 3b)$$

Wenn nun $\overline{HS} \parallel \overline{AC}$ und $\overline{CG} \parallel \overline{EF}$ sind, wird

$$\triangle HSF \sim \triangle ACG, \text{ daher}$$

$$\overline{HF} : \overline{AG} = \overline{SF} : \overline{CG} = \overline{SF} : \overline{EF}$$

$$\overline{HF} : \overline{AG} = (2b + a) : (3a + 3b)$$

Nun ist aber $\overline{AG} = \frac{a+b}{2}$, folglich

$$\overline{HF} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2b+a}{3(a+b)} = \frac{2b+a}{6} = \frac{b}{3} + \frac{a}{6} = \frac{b}{3} + \frac{a}{2} - \frac{a}{3}$$

$$\overline{HF} = \frac{a}{2} - \frac{a-b}{3}$$

Da $\overline{AF} = \frac{a}{2}$ ist, ergibt sich

$$\overline{AH} = \frac{a-b}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(54)}$$

Auf Grund dieses Resultates kann man den Schwerpunkt folgendermaßen konstruieren. Fig. 78.

Man mache $\overline{DJ} \parallel \overline{CB}$, dann ist $\overline{AJ} = (a - b)$. Hierauf wird $\overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{AJ}$ gesucht und $\overline{HM}$ parallel zu $\overline{AC}$ gezogen.

Ebenso mache man

$$\overline{CL} \parallel \overline{AD}, \ \overline{BK} = \frac{1}{3}\overline{BL}$$

und ziehe man $\overline{KN} \parallel \overline{BD}$.

Der gesuchte Schwerpunkt liegt dann im Schnittpunkte von $\overline{HM}$ u. $\overline{KN}$

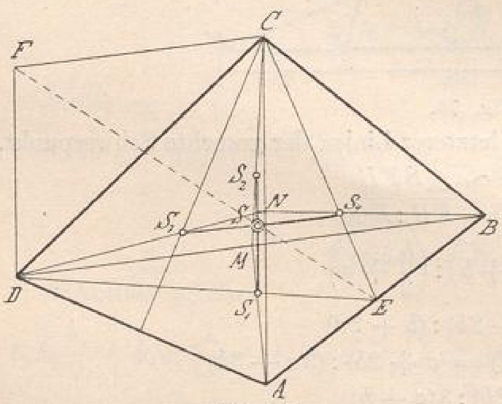

Fig. 79.

98. Schwerpunkt eines Trapezoides (nach R. Land). Fig. 79.

Auflösung: Man ziehe die Diagonale $\overline{BD}$ und halbiere sie, d. h. man mache

$$\overline{MD} = \overline{MB}.$$

$$\left.\begin{array}{rl}\text{Dann ist} & \overline{MS_1} = \frac{1}{3}\overline{MA} \\ \text{und} & \overline{MS_2} = \frac{1}{3}\overline{MC}\end{array}\right\} \text{somit}$$

$$\overline{S_1 S_2} \parallel \overline{AC}.$$

In $\overline{S_1 S_2}$ muß der Schwerpunkt liegen. Ebenso wird auch die $\overline{AC}$ halbiert. Es werden hierauf die Schwerpunkte S_3 und S_4 der Dreiecke ACD und ABC gesucht. Dann ist analog wie früher

$$\left.\begin{array}{rl} & \overline{NS_3} = \frac{1}{3}\overline{ND} \\ \text{und} & \overline{NS_4} = \frac{1}{3}\overline{NB}\end{array}\right\} \text{folglich}$$

$$\overline{S_3 S_4} \parallel \overline{DB}.$$

Im Schnitte von $\overline{S_1 S_2}$ und $\overline{S_3 S_4}$ liegt der gesuchte Schwerpunkt S. — Werden $\overline{DE}$ und $\overline{CE}$ eingezeichnet und $\overline{CF} \parallel \overline{DB}$ und $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ gezogen, so ergibt sich

$$\overline{S_1 S_2} \parallel \overline{DF}$$

$$\text{und } \overline{S_3 S_4} \parallel \overline{CF}$$

Nun gilt die Beziehung $\overline{ES_4} : \overline{EC} = \overline{ES_1} : \overline{ED}$, daher ist

$$\text{Fläche } ES_1SS_4 \sim \text{Fläche } EDFC,$$

somit ist die Linie ESF eine Gerade und wird

$$\boldsymbol{\overline{ES} = \frac{1}{3}\overline{EF}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(55)}$$

Um nun den Schwerpunkt zu konstruieren (Fig 80), ziehe man zunächst die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ und mache $\overline{CF} \parallel \overline{DB}$ und $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$. — Der Schwerpunkt liegt dann im ersten Drittel von $\overline{EF}$.

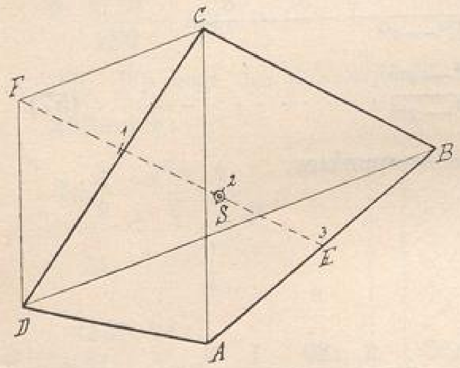

Fig. 80.

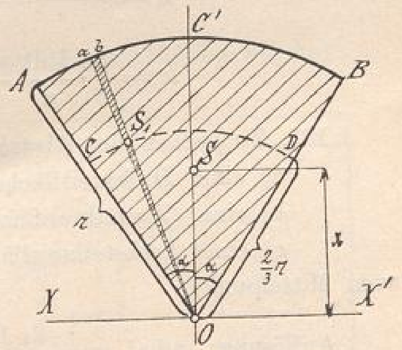

Fig. 81.

99. Man suche den Schwerpunkt eines Kreissektors (Kreisausschnittes), Fig. 81.

Auflösung: Wird aus dem Ausschnitte das unendlich kleine Dreieck Oab herausgegriffen, so liegt dessen Schwerpunkt S_1 in der Entfernung $\frac{2}{3}r$ von O. — Der Kreis CD mit dem Radius $\frac{2}{3}r$ ist also eine Schwerlinie des Ausschnittes. Sein Schwerpunkt ist demnach derjenige desselben.

Somit gilt unter Verwendung der Gleichung (51c)

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha^0} \quad (56)$$

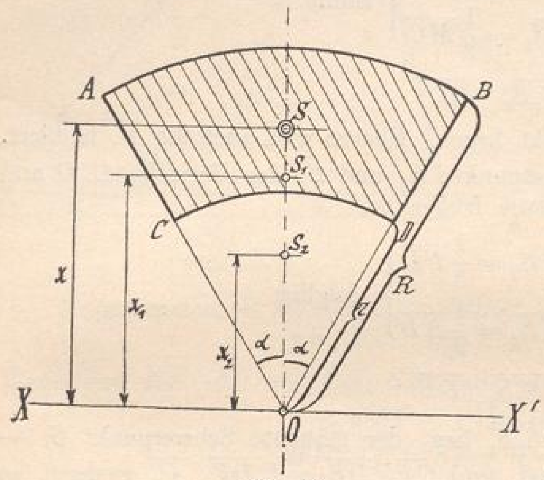

Fig. 82.

100. Der Schwerpunkt eines Kreisringstückes, Fig. 82, ist zu suchen.

Auflösung: Das statische Moment des Kreisringstückes ist gleich demjenigen des Sektors OAB minus dem des Sektors OCD.

Demnach gilt

$$ABCD \cdot x = OAB \cdot x_1 - OCD \cdot x_2$$

$$x = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \widehat{\alpha} \cdot R \cdot x_1 - \frac{1}{2} \cdot 2r\,\alpha \cdot r \cdot x_2}{\frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \widehat{\alpha} \cdot R - \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \widehat{\ } \cdot r}$$

$$x = \frac{R^2 \cdot x_1 - r^2 \cdot x_2}{R^2 - r^2}$$

$$x = \frac{R^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot R \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha^0} - r^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \frac{\sin\alpha}{\alpha^0}}{R^2 - r^2}$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha^0} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (57)$$

101. Zu suchen der Abstand des Schwerpunktes
   a) einer Halbkreisfläche,
   b) einer Viertelkreisfläche,
   c) einer Sechstelkreisfläche

vom Mittelpunkt.

Auflösung: ad a) $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \cdot \frac{\sin 90}{90} = \frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot r \frac{1}{90}$

$$x = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (58)$$

$$\text{ad b)}\quad x = \frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot r\,\frac{\sin 45}{45} = \frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\,r\,\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 45}$$

$$x = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{r}{\pi}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

$$\text{ad c)}\quad x = \frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\,r\,\frac{\sin 30}{30} = \frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\,r\,\frac{1}{2\cdot 30}$$

$$x = 2\cdot\frac{r}{\pi}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

102. Der Abstand des Schwerpunktes eines Kreissegmentes (Kreisabschnittes) von seinem Mittelpunkte ist zu suchen. Fig. 83.

$$x = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2r\frown\cdot r\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\,r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha^0} - \frac{1}{2}\cdot 2r\sin\alpha\cdot r\cos\alpha\,\frac{2r\cos\alpha}{3}}{\frac{1}{2}\cdot 2r\frown\cdot r - \frac{1}{2}\cdot 2r\sin\alpha\cdot r\cdot\cos\alpha}$$

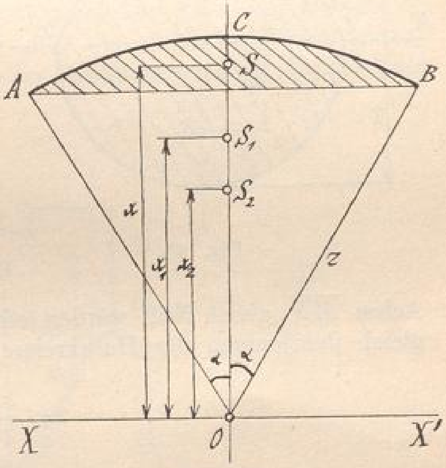

Fig. 83.

$$x = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^0}\cdot r^3\cdot\widehat{\alpha} - \frac{2}{3}\,r^3\cdot\sin\alpha\cos^2\alpha}{r^2\cdot\widehat{\alpha} - r^2\cdot\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$x = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha^0}\,r^3\cdot\frac{\pi}{180}\cdot\alpha^0 - \frac{2}{3}\cdot\sin\alpha\cos^2\alpha}{r^2\cdot\frac{\pi}{180}\cdot\alpha^0 - r^2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$x = \frac{2}{3}\cdot\frac{r\sin\alpha - r\sin\alpha\cos^2\alpha}{\frac{\pi}{180}\,\alpha^0 - \sin\alpha\cos\alpha}$$

$$x = \frac{2}{3}\cdot r\,\frac{\sin\alpha - \sin\alpha\,(1-\cos^2\alpha)}{\frac{\pi}{180}\,\alpha^0 - \sin\alpha\cos\alpha}$$

$$x = \frac{2}{3}\,r\,\frac{\sin^3\alpha}{\frac{\alpha^0\cdot\pi}{180} - \sin\alpha\cos\alpha}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

103. Wo liegt der Schwerpunkt der in Fig. 84 gezeichneten Fläche?

Auflösung:

$$x = \frac{bh\,\frac{h}{2} - \frac{r^2\pi}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi}}{bh - \frac{\pi r^2}{2}}$$

$$x = \frac{3\,bh^2 - 4\,r^3}{6\,bh - 3\pi r^2}$$

$$x = \frac{3\,bh^2 - 4\,r^3}{3\,(2\,bh - \pi r^2)}.$$

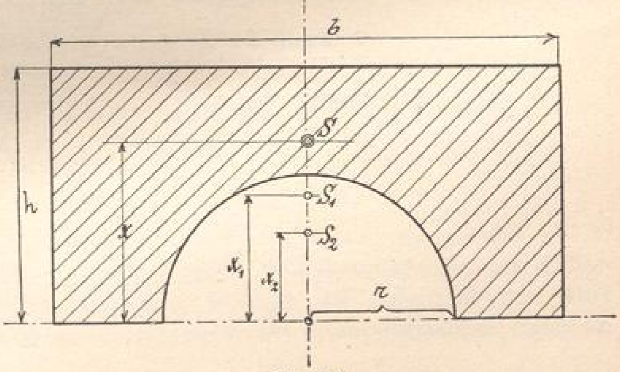

Fig. 84.

104. Eine Fläche besteht aus einem gleichschenkligen Dreiecke und einem Halbkreis, dessen Durchmesser gleich ist der Basis des Dreieckes. — Wo muß der Schwerpunkt des letzteren liegen, damit derjenige der ganzen Fläche in den Mittelpunkt des Halbkreises falle? Fig. 85.

Auflösung: Soll O der Schwerpunkt der Fläche sein, dann muß die Summe der statischen Momente von Dreieck und Halbkreis in bezug auf die

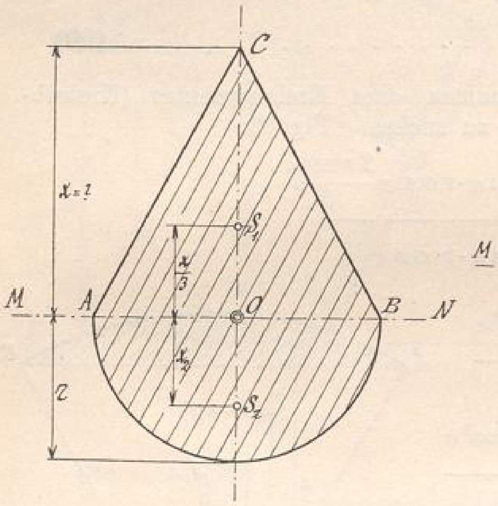

Fig. 85.

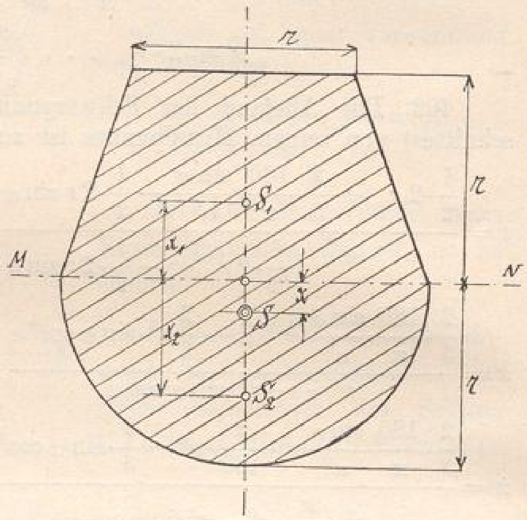

Fig. 86.

Achse $\overline{MN}$ gleich Null werden oder das statische Moment des Dreieckes muß gleich demjenigen des Halbkreises sein, also

$$2r \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$$

$$r x^2 = 2 r^3$$

$$x = r\sqrt{2}.$$

105. Wo liegt der Schwerpunkt einer Fläche, welche aus einem Halbkreis und einem gleichschenkligen Trapeze mit den Parallelseiten $2r$ und r und der Höhe r zusammengesetzt ist? Fig. 86.

$$x = \frac{\frac{r}{3} \cdot \frac{2r + 2r}{2r + r} \cdot \frac{2r + r}{2} \cdot r - \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}}{\frac{2r + r}{2} \cdot r + \frac{r^2 \pi}{2}} = \frac{\frac{2r^3}{3} - \frac{2r^3}{3}}{\frac{3r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2}}$$

$$x = 0.$$