Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 25. Graphische Ermittlung des Schwerpunktes ebener Flächen. Beispiele 106-107

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

§ 25. Graphische Ermittlung des Schwerpunktes ebener Flächen.

Dem exakten Zeichner wird es durch folgende Methode ermöglicht, den Schwerpunkt beliebiger Figuren graphisch zu ermitteln.

Man zerlege die gegebene Fläche in Teile, deren Schwerpunkte bekannt sind, Fig. 87. In letzterer denke man sich die Gewichte der Teilflächen vertikal nach abwärts wirken. Die Resultierende dieser Gewichte greift nun im Schwerpunkte der gegebenen Fläche an.

Hat die Fläche eine Symmetrieachse, so ergibt sich ihr Schwerpunkt als Schnitt der nach obigem Verfahren gesuchten Resultierenden mit dieser Symmetrieachse. Wenn dies nicht der Fall ist, muß eine zweite Schwerpunktsachse gefunden werden.

An nachstehenden Beispielen soll die soeben beschriebene graphische Methode näher erläutert werden.

Beispiele.

106. Es ist der Schwerpunkt der in Fig. 87 gegebenen Fläche zu suchen. —

Auflösung: Unter der Voraussetzung, daß die gegebene Fläche gleichmäßig mit Masse belegt ist, kann man statt der Resultierenden der Teilgewichte

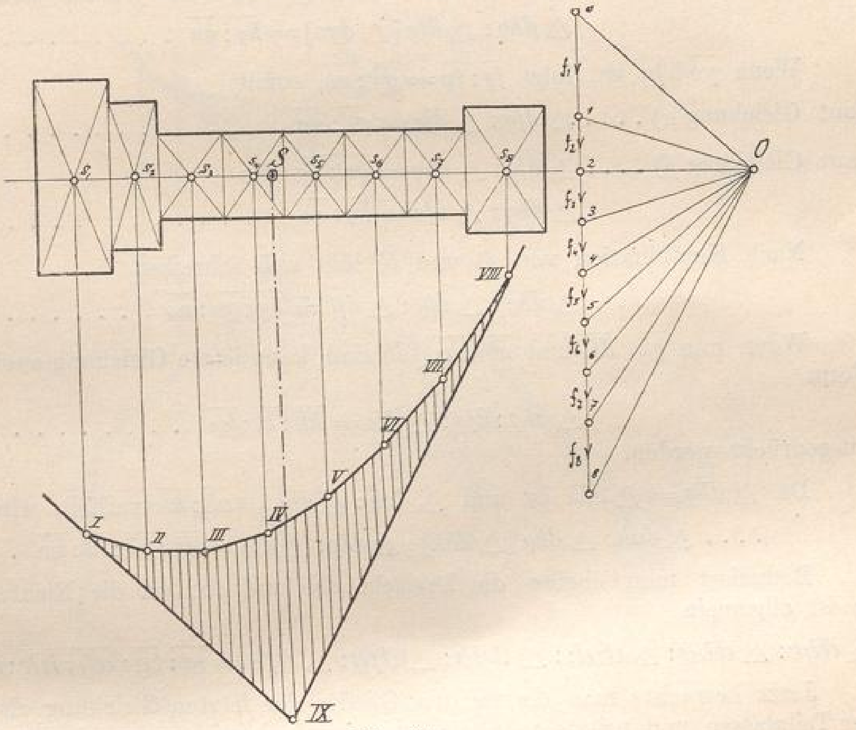

Fig. 87.

auch die der Teilflächen suchen. Man trage f_1 bis f_8 an, nehme den Pol O beliebig und verzeichne Kräfte- und Seilpolygon. Der Schnittpunkt der äußersten Seiten des letzteren ergibt den Angriffspunkt der Resultierenden aller Teilgewichte. Die Resultierende selbst schneidet die Symmetrieachse dann im gesuchten Schwerpunkte S.

107. Der Schwerpunkt des in Fig. 88 gezeichneten, unregelmäßigen Polygons ist graphisch zu finden.

Auflösung: Das Polygon werde in Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze d zerlegt. Ist die Masse über das Polygon gleichmäßig verteilt, so sind die Dreiecksflächen den Dreiecksmassen proportional, und man kann daher im Schwerpunkte der ersteren die letzteren vertikal nach abwärts wirkend denken. Die Resultierende der Massenkräfte enthält den gesuchten Schwerpunkt S.

Folgendes Verfahren erlaubt nun, die Flächen der einzelnen Dreiecke als Linien in der Richtung $\overline{ah}$ untereinander aufzutragen.

Man verlängere gf und ziehe $ep \parallel df$. Dann folgt

$$\triangle dfe = \triangle dfp$$

Da die Dreiecke dfg und dfp gleiche Höhen haben, verhält sich

$$\triangle dfg : \triangle dfe\,[\triangle dfp] = \overline{fg} : \overline{fp} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Verlängert man ferner $\overline{gh}$ und zeichnet $\overline{nf} \parallel \overline{dg}$, dann ergibt sich

$$\triangle dfg = dgn,$$

und weil die Dreiecke dhg und dgn wieder gleiche Höhe haben, wird

$$\triangle dhg : \triangle dfg\,[\triangle dgn] = \overline{hg} : \overline{gn} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Wenn $\overline{po} \parallel \overline{fn}$ ist, folgt $\overline{fg} : \overline{fp} = \overline{gn} : \overline{no}$, somit

laut Gleichung α) .... $\triangle dfg : \triangle dfe = \overline{gn} : \overline{no} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$

laut Gleichung β) .... $\triangle dfg : \triangle dhg = \overline{gn} : \overline{hg}$, also

$$\triangle dhg : \triangle dfe = \overline{hg} : \overline{no} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

Nach Kombination von β) und δ) läßt sich schreiben

$$\triangle dhg : \triangle dfg : \triangle dfe = \overline{hg} : \overline{gn} : \overline{no} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

Wenn nun $\overline{gk} \parallel \overline{dh}$ und $\overline{nl} \parallel \overline{om} \parallel dh$ sind, kann letzte Gleichung auch in der Form

$$\triangle dhg : dfg : \triangle dfe = \overline{hk} : \overline{kl} : \overline{lm} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\eta)$$

ausgedrückt werden.

Da $\triangle dhg = \triangle dhk$ ist und $\triangle dah : \triangle dhk = \overline{ah} : \overline{hk}$ verhält, wird

$$\ldots\ \triangle dah : \triangle dhg\,[\triangle dhk] : \triangle dfg : \triangle dfe = \overline{ah} : \overline{hk} : \overline{kl} : \overline{lm} \quad \ldots \quad (\iota)$$

Reduziert man ebenso die Dreiecke dab und dbc auf die Richtung $\overline{ah}$, so ist allgemein

$$\boldsymbol{\triangle dbc : \triangle dba : \triangle dah : \triangle dgh : \triangle dfg : \triangle dfe = \overline{st} : \overline{ta} : \overline{ah} : \overline{hk} : \overline{kl} : \overline{lm}}$$

Jetzt betrachte man die rechten Glieder der letzten Gleichung als Maße der Teilmassen und nehme man die Schwerpunktsbestimmung laut Fig. 88 vor.