Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 27. Guldinische Regel zur Bestimmung der Oberfläche und des Inhaltes von Rotationskörpers. Beispiele 108-112

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Statt die Figur an einem Faden aufzuhängen, kann man sie auf eine scharfe Schneide auflegen und derart ihre Schwerlinie finden (durch Ausbalanzieren).

Freilich ist von den Resultaten dieser Methode kein hoher Genauigkeitsgrad zu verlangen.

§ 27. Guldinsche Regel zur Bestimmung der Oberfläche und des Inhaltes von Rotationskörpern.

Dreht sich der Bogen $AB = b$ um die Achse $\overline{XX'}$, so daß seine einzelnen Punkte von derselben immer konstanten Abstand behalten, dann entsteht ein Rotationskörper, Fig. 89.

a) Bestimmung der Oberfläche.

Die Oberfläche des durch die Rotation des Bogenstückchens $\overline{ab}$, welches

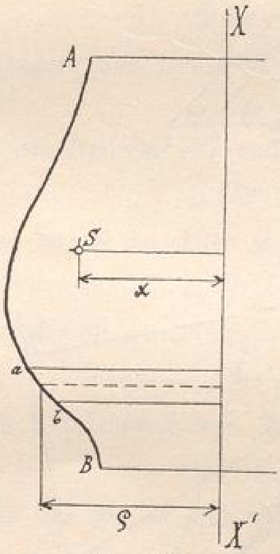

Fig. 89.

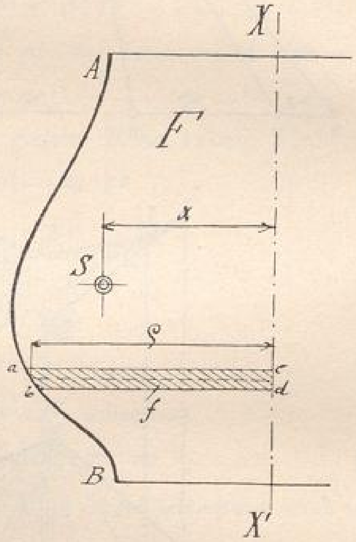

Fig. 90.

parallel zur Achse $\overline{XX'}$ gedacht werden kann (weil es unendlich klein ist), entstehenden Zylinders ist

$$2\varrho\pi \cdot \overline{ab}.$$

Der Inhalt der bei der Rotation des ganzen Bogens $AB = b$ erzeugten Flächen ist daher

$$O = \Sigma\,(2\varrho\pi \cdot ab) = 2\pi \cdot \Sigma\,(ab \cdot \varrho)$$

$\overline{ab} \cdot \varrho$ ist ein statisches Moment. Nach dem Satze von den statischen Momenten (48) ergibt sich dann

$$\Sigma\,(\overline{ab} \cdot \varrho) = b \cdot x.$$

Demnach wird

$$\boldsymbol{O = b \cdot 2\pi x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(62)}$$

„Die Oberfläche eines Rotationskörpers wird gefunden, wenn man die Länge des rotierenden Bogens mit dem Wege seines Schwerpunktes multipliziert.“

b) Bestimmung des Inhaltes.

Der Inhalt des unendlich kleinen Zylinders, welcher durch die Rotation des unendlich schmalen Flächenstreifens $f = abcd$ entsteht, Fig. 90, ist

$$\varrho^2 \cdot \pi \cdot \overline{ab}.$$

Daher ist der Inhalt des ganzen Umdrehungskörpers

$$V = \Sigma(\varrho^2 \cdot \pi \cdot \overline{ab}) = 2\pi \cdot \Sigma\left(\overline{ab} \cdot \varrho \cdot \frac{\varrho}{2}\right) = 2\pi \cdot \Sigma\left(f \cdot \frac{\varrho}{2}\right).$$

$f \cdot \frac{\varrho}{2}$ ist das statische Moment des unendlich schmalen Flächenstreifens f.

Demnach wird $$\Sigma\left(f \cdot \frac{\varrho}{2}\right) = F \cdot x.$$

Das Volumen des Umdrehungskörpers bestimmt sich sodann mit

$$\boldsymbol{V = F \cdot 2\pi x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(63)}$$

„Der Inhalt des Rotationskörpers, welcher durch Rotation einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugt wird, ist gleich dem Produkte aus dem Inhalte der Fläche und dem Wege ihres Schwerpunktes.“

Beispiele.

108. Es sind Mantelfläche und Inhalt eines Kreiskegels zu finden.

Auflösung: Der Kegel entsteht durch Rotation eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten r und h um die letztere.

$$M = b \cdot 2\pi x = s \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{2},$$

wenn s die Seite (Erzeugende) des Kegels bedeutet.

$$\boldsymbol{M = \pi r s}$$

$$V = \frac{rh}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{2}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}}$$

109. Es ist der Inhalt eines Kegelstumpfes zu bestimmen. Radien der Grundflächen sind R und r, die Höhe ist h. Fig. 91.

Auflösung:

$$V = F \cdot 2\pi x$$

$$\frac{R+r}{2} \cdot h \cdot x = \frac{rh}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} r + \frac{Rh}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{R}{2} + \frac{1}{3} r\right)$$

$$x = \frac{\frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{3} R^2 + \frac{1}{3} Rr}{R+r}$$

$$x = \frac{R^2 + Rr + r^2}{3(R+r)}$$

$$V = \frac{R+r}{2} h \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{3(R+r)}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r_2)}$$

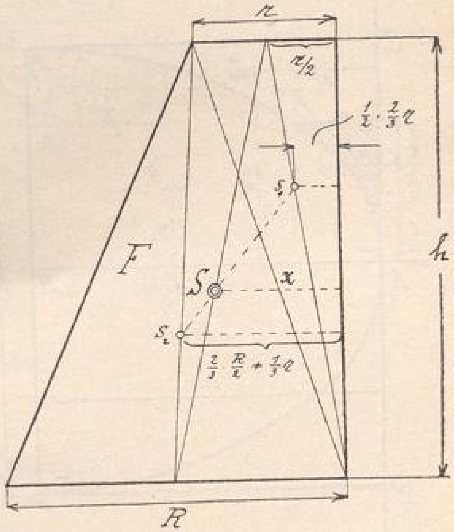

Fig. 91.

110. Es sind Oberfläche und Inhalt einer Kugel zu bestimmen.

Auflösung: $O = b \cdot 2\pi x = r\pi \cdot 2\pi x$

Lt (51c) ist $x = \frac{2r}{\pi}$, daher

$$O = r\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{2r}{\pi}$$

$$\boldsymbol{O = 4r^2\pi = d^2\pi}$$

$$V = \frac{r^2\pi}{2} \cdot 2\pi x$$

Lt (58) ist $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$

$$V = \frac{r^2\pi}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3} r^3\pi = \frac{\pi}{6} d^3.}$$

111. Oberfläche und Inhalt eines zylindrischen Ringes zu bestimmen. Mittlerer Durchmesser desselben sei D, der Durchmesser seines Querschnittes d. Fig. 92.

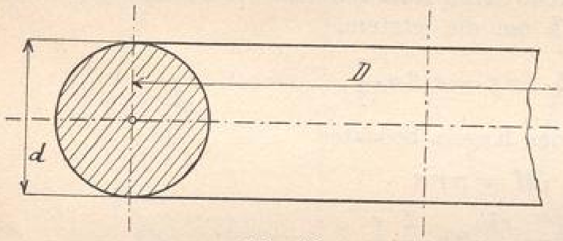

Fig. 92.

Auflösung:

$$O = b \cdot 2\pi x = d\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{D}{2}$$

$$\boldsymbol{O = \pi^2 \cdot Dd}$$

$$V = F \cdot 2\pi x = \frac{d^2\pi}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{D}{2}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi^2}{4} Dd^2.}$$

112. Die Lagen der Schwerpunkte S und S' in den Parabelstücken ABD und ACD, Fig. 93, festzustellen.

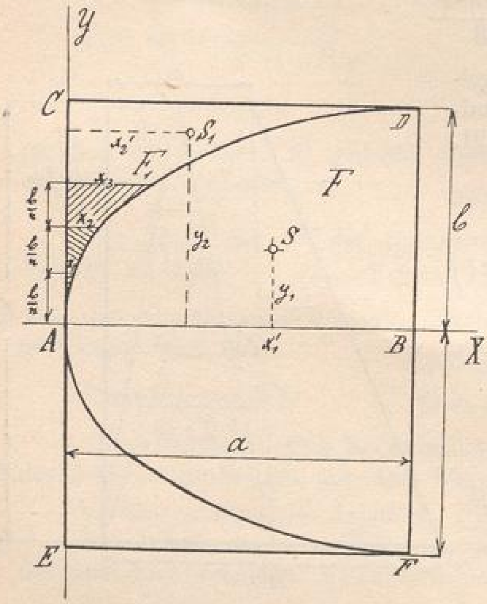

Fig. 93.

Auflösung: Sind die Flächen ABD und ACD, sowie die durch ihre Rotation um die X-Achse entstehenden Paraboloidvolumen gefunden, so lassen sich mittels der Guldinschen Regel leicht die Lagen von S und S' bestimmen. Zunächst werde F_1 gesucht. Zu diesem Ende teile man $\overline{AC} = b$ in unendlich viele gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Parallele zur X-Achse bis zur Parabel. Die Längen derselben sind, da die Parabel die Gleichung $y^2 = 2px$ hat, der Reihe nach

$$x_1 = \frac{\left(\frac{b}{n}\right)^2}{2p}, \quad x_2 = \frac{\left(2\frac{b}{n}\right)^2}{2p}, \quad \ldots\ldots$$

Die unendlich kleinen, schraffierten Rechtecke haben dann einen Inhalt

$$f_1 = \frac{\left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n}}{2p}, \quad f_2 = \frac{\left(2\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n}}{2p}, \quad \ldots\ldots$$

Demnach ergibt sich die Fläche F_1 mit

$$F_1 = \frac{b}{n} \cdot \frac{\left(\frac{b}{n}\right)^2}{2p} \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2) \text{ oder}$$

$$F_1 = \frac{b^3}{n^3 \cdot 2p}(1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2)$$

Die Summe in der Klammer wird folgendermaßen bestimmt. Es ist

$$\begin{array}{llllllll}
 & & (n+1)^3 & = & n^3 & +3n^2 & +3n & +1 \\
\text{für} & n=0 \text{ ist} \ldots & 1^3 & = & 0 & +3\cdot 0 & +3\cdot 0 & +1 \\
,, & n=1 \;,, \ldots & 2^3 & = & 1^3 & +3\cdot 1^2 & +3\cdot 1 & +1 \\
,, & n=2 \;,, \ldots & 3^3 & = & 2^3 & +3\cdot 2^2 & +3\cdot 2 & +1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
,, & n\ldots(n-1) \;,, \ldots & n^3 & = & (n-1)^3 & +3(n-1)^2 & +3(n-1) & +1 \\
,, & n\ldots\ldots n \;,, \ldots & (n+1)^3 & = & n^3 & +3n^2 & +3n & +1 \\
\end{array}$$

Durch Addition auf beiden Seiten ergibt sich demnach

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = 1^3 + \ldots + n^3 + 3(1^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + \ldots + n) + (n+1)$$

oder
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n}{2}(n+1) - \frac{n+1}{3}$$

$$= \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6}$$

$$= \frac{n+1}{6} \cdot [2(n+1)^2 - 3n - 2], \text{ d. h.}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n^3 \frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$$

Für $n = \infty$ wird dann

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{6} \cdot 2 = \frac{n^3}{3}$$

Also ergibt sich $F_1 = \frac{b^3}{2p \cdot n^3} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{b^3}{6p}$; da $p = \frac{b^2}{2a}$ ist, folgt

$$F_1 = \frac{b^3}{6\frac{b^2}{2a}} \text{ oder}$$

$$F_1 = \frac{ab}{3}, \text{ demnach}$$

$$F = \frac{2}{3}ab$$

Durch Rotation des Parabelstückes ABD um die X-Achse entsteht ein Paraboloid, dessen Volumen gleich dem halben Volumen des Zylinders $CDEF$ sein muß, da die Querschnitte DAF und $DCEF$ sich verhalten wie $\frac{4}{3}ab : 2ab = 1 : 2$.

Somit ergibt sich durch Anwendung der Guldinschen Regel aus

$$\frac{2}{3}ab \cdot 2\pi \cdot y_1 + \frac{1}{2}\pi b^2 a$$

$$y_1 = \frac{3}{8}b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(64a)}$$

Ebenso folgt aus der Erwägung, daß das durch Rotation des Parabelstückes ACD um die X-Achse entstehende Volumen gleich $^1/_2$ des Zylindervolumens $\pi b^2 a$ sein muß,

$$\frac{1}{3}ab \cdot 2\pi y_2 = \frac{1}{2}\pi b^2 a \quad \text{und hieraus}$$

$$y_2 = \frac{3}{4}b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(64b)}$$

y_2 ist somit zweimal so groß als y_1. — Analog läßt sich schließen, daß x'_1 zweimal so groß werden wird wie x'_2. Die durch die Rotation der Parabelstücke ABD und ACD um die Y-Achse entstehenden Volumen müssen zusammen das Zylindervolumen $\pi a^2 b$ ergeben. Es wird also

$$\frac{1}{3}ab \cdot 2\pi x'_2 + \frac{2}{3}ab \cdot 2\pi x'_1 = \pi a^2 b.$$

Beiderseits durch πab gekürzt und für $x'_1 = 2x'_2$ gesetzt, folgt

$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot x'_2 + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2x'_2 = a$$

$$\frac{10}{3}x'_2 = a$$

$$x'_2 = \frac{3}{10}a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(64c)}$$

Demnach

$$x'_1 = \frac{3}{5}a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(64d)}$$

§ 28. Ermittlung des Schwerpunktes homogener Körper.

113. Schwerpunkt einer Pyramide (eines Kegels). Fig. 94.

Auflösung: Wird die Pyramide durch zur Grundfläche parallele Ebenen in sehr dünne Schichten (Dreiecke) zerlegt, so liegen deren Schwerpunkte sämtlich in der Geraden $\overline{DM}$, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet. Betrachtet man nun BCD als Grundfläche und A als Spitze der Pyramide, so muß, wenn N der Schwerpunkt des Dreieckes BCD