Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 28. Ermittlung des Schwerpunktes homogener Körper. Beispiele 113-118

Durch Rotation des Parabelstückes ABD um die X-Achse entsteht ein Paraboloid, dessen Volumen gleich dem halben Volumen des Zylinders $CDEF$ sein muß, da die Querschnitte DAF und $DCEF$ sich verhalten wie $\frac{4}{3}ab : 2ab = 1 : 2$.

Somit ergibt sich durch Anwendung der Guldinschen Regel aus

$$\frac{2}{3}ab \cdot 2\pi \cdot y_1 + \frac{1}{2}\pi b^2 a$$

$$y_1 = \frac{3}{8}b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(64a)}$$

Ebenso folgt aus der Erwägung, daß das durch Rotation des Parabelstückes ACD um die X-Achse entstehende Volumen gleich $^1/_2$ des Zylindervolumens $\pi b^2 a$ sein muß,

$$\frac{1}{3}ab \cdot 2\pi y_2 = \frac{1}{2}\pi b^2 a \quad \text{und hieraus}$$

$$y_2 = \frac{3}{4}b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(64b)}$$

y_2 ist somit zweimal so groß als y_1. — Analog läßt sich schließen, daß x'_1 zweimal so groß werden wird wie x'_2. Die durch die Rotation der Parabelstücke ABD und ACD um die Y-Achse entstehenden Volumen müssen zusammen das Zylindervolumen $\pi a^2 b$ ergeben. Es wird also

$$\frac{1}{3}ab \cdot 2\pi x'_2 + \frac{2}{3}ab \cdot 2\pi x'_1 = \pi a^2 b.$$

Beiderseits durch πab gekürzt und für $x'_1 = 2x'_2$ gesetzt, folgt

$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot x'_2 + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2x'_2 = a$$

$$\frac{10}{3}x'_2 = a$$

$$x'_2 = \frac{3}{10}a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(64c)}$$

Demnach
$$x'_1 = \frac{3}{5}a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \textbf{(64d)}$$

§ 28. Ermittlung des Schwerpunktes homogener Körper.

113. Schwerpunkt einer Pyramide (eines Kegels). Fig. 94.

Auflösung: Wird die Pyramide durch zur Grundfläche parallele Ebenen in sehr dünne Schichten (Dreiecke) zerlegt, so liegen deren Schwerpunkte sämtlich in der Geraden $\overline{DM}$, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet. Betrachtet man nun BCD als Grundfläche und A als Spitze der Pyramide, so muß, wenn N der Schwerpunkt des Dreieckes BCD

ist, der Schwerpunkt der Pyramide auch in der Geraden $\overline{AN}$ liegen. Er ist somit der Schnittpunkt S von $\overline{DM}$ und $\overline{AN}$. Zieht man die Hilfslinie $\overline{MN}$, so gilt

$$\overline{EM} = \frac{1}{3}\overline{EA}$$

$$\overline{EN} = \frac{1}{3}\overline{DE}$$

Daher ist $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$ und es wird

$\triangle SNM \sim \triangle SAD$, somit

$$\overline{MN} = \frac{1}{3}\overline{AD}$$

$$\overline{MS} = \frac{1}{3}\overline{SD}, \text{ also}$$

$$\overline{MS} = \frac{1}{4}\overline{MD} \,. \quad (65)$$

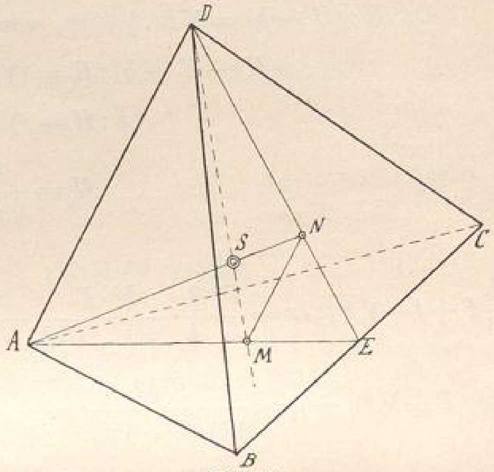

Fig. 94.

Eine vielseitige Pyramide kann durch Ebenen, welche durch die Spitze gehen, in dreiseitige Pyramiden zerlegt werden, deren Schwerpunkte sämtlich in $^1/_4$ der Höhe, also in einer zur Grundfläche parallelen Ebene liegen. In letzterer liegt dann der Schwerpunkt der ganzen Pyramide. Daher ergibt sich das Gesetz:

„Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt in der Geraden, welche den Schwerpunkt der Basis mit der Spitze verbindet und im ersten Viertel der Höhe."

Dasselbe gilt vom Kegel, da derselbe als eine Pyramide mit unendlich viel Seiten aufgefaßt werden kann.

114. Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes, Fig. 95. Die Grundflächen sind F und f, Höhe ist h.

Auflösung: Der Inhalt des Pyramidenstumpfes ist

$$\frac{h}{3}(F + \sqrt{Ff} + f)$$

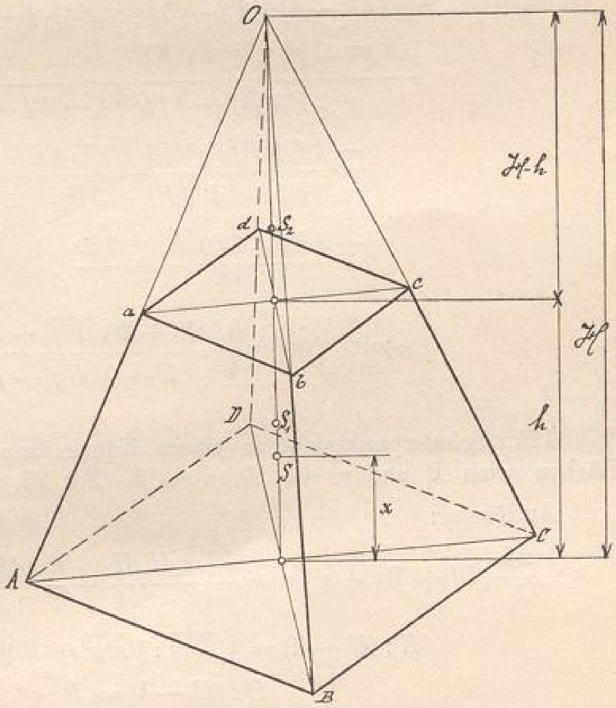

Fig. 95.

Das statische Moment des Pyramidenstumpfes in bezug auf die Grundfläche F muß gleich sein dem statischen Momente der ganzen Pyramide $ABCDO$ weniger dem der Ergänzungspyramide $abcdO$. Demnach gilt

$$\frac{h}{3}(F+\sqrt{Ff}+f)\cdot x=\frac{FH}{3}\cdot\frac{H}{4}-f\,\frac{H-h}{3}\left(h+\frac{H-h}{4}\right).$$

Da $H:(H-h)=\sqrt{F}:\sqrt{f}$ ist, wird

$$(H-H+h):H=(\sqrt{F}-\sqrt{f}):\sqrt{F} \quad \text{oder}$$

$$h:H=(\sqrt{F}-\sqrt{f}):\sqrt{F}, \quad \text{woraus}$$

$$H=\frac{h\sqrt{F}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}} \quad \text{sich ergibt. Somit folgt}$$

$$\frac{h}{3}F+f+\sqrt{Ff})\cdot x=\frac{F}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{h^2\cdot F}{(\sqrt{F}-\sqrt{f})^2}-\frac{f}{3}\cdot\left[\frac{h\sqrt{F}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}-h\right]\cdot\left[\frac{\frac{h\sqrt{F}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}+3h}{4}\right]$$

$$hx(F+\sqrt{Ff}+f)=\frac{F^2h^2}{4(\sqrt{F}-\sqrt{f})^2}-\frac{fh\sqrt{f}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}\cdot\frac{4h\sqrt{F}-3h\sqrt{f}}{4(\sqrt{F}-\sqrt{f}}$$

$$x=\frac{h}{4}\cdot\frac{\dfrac{F^2-f\sqrt{f}(4\sqrt{F}-3\sqrt{f})}{(\sqrt{F}-\sqrt{f})^2}}{F+\sqrt{Ff}+f}=\frac{h}{4}\cdot\frac{\dfrac{F^2-4f\sqrt{Ff}+3f^2}{F-2\sqrt{Ff}+f}}{F+\sqrt{Ff}+f}$$

$$(F^2-4f\sqrt{Ff}+3f^2):(F+f-2\sqrt{Ff})=F+2\sqrt{Ff}+3f$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-F^2\pm Ff\mp 2F\sqrt{Ff}} \\
2F\sqrt{Ff}-4f\sqrt{Ff}-Ff+3f^2 \\
\underline{-2F\sqrt{Ff}\pm 2f\sqrt{Ff}\mp 4Ff} \\
3Ff-6f\sqrt{Ff}+3f^2 \\
\underline{-3Ff\mp 6f\sqrt{Ff}\pm 3f^2} \\
\emptyset
\end{array}$$

somit $$x=\frac{h}{4}\cdot\frac{F+2\sqrt{Ff}+3f}{F+\sqrt{Ff}+f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(66)}$$

115. Schwerpunktslage in einem Kegelstumpf. Die Radien der Grundflächen seien R und r, die Höhe sei h. Fig. 96.

Auflösung:

$$\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)\,x=\frac{R^2\cdot\pi H}{3}\cdot\frac{H}{4}-\frac{r^2\pi(H-h)}{3}\left[h+\frac{H-h}{4}\right]$$

$$H:(H-h)=\sqrt{R^2\pi}:\sqrt{r^2\pi}=R\sqrt{\pi}:r\sqrt{\pi}$$

$$H:(H-h)=R:r$$

$$h:H=(R-r):R$$

$$H=\frac{hR}{R-r}$$

$$\pi h (R^2 + Rr + r^2)\, x = \frac{R^2\pi}{4} \cdot \frac{h^2 R^2}{(R-r)^2} - r^2\pi \left(\frac{hR}{R-r} - h\right) \left(h + \frac{\frac{hR}{R-r} - h}{4}\right)$$

$$\pi (R^2 + Rr + r^2)\, x = \frac{R^4 h\pi}{4(R-r)^2} - r^2\pi \left(\frac{R}{R-r} - 1\right) \cdot \frac{4h + \frac{hR}{R+r} - h}{4}$$

$$= \frac{h\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{(R-r)^2} - r^2\pi \frac{r}{R-r} \cdot \frac{4Rh - 4hr + hR - hR + rh}{4(R-r)}$$

$$= \frac{h\pi}{4} \cdot \frac{R^4}{(R-r)^2} - \frac{r^3\pi(4Rh - 3hr)}{4(R-r)^2}$$

$$= \frac{h\pi}{4} \left\{\frac{R^4 - r^3(4R - 3r)}{(R-r)^2}\right\} = \frac{h\pi}{4} \cdot \frac{R^4 - 4Rr^3 + 3r^4}{(R-r)^2}$$

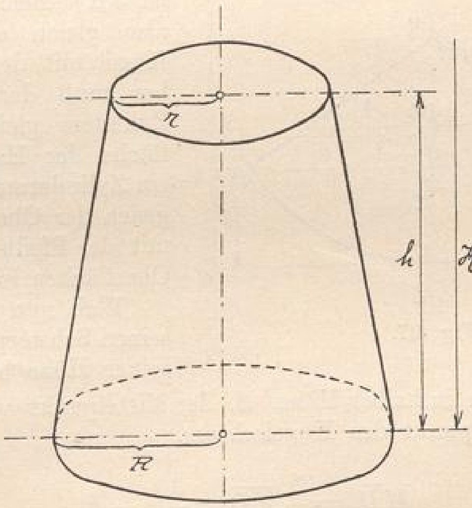

Fig. 96.

$$(R^4 - 4Rr^3 + 3r^4) : (R^2 - 2Rr + r^2) = R^2 + 2Rr + 3r^2$$

$$\begin{array}{l} -R^4 \mp 2R^3 r \pm R^2 r^2 \\ \hline 2R^3 r - 4Rr^3 - R^2 r^2 + 3r^4 \\ -2R^3 r \mp 4R^2 r^2 \pm 2Rr^3 \\ \hline 3R^2 r^2 - 6Rr^3 + 3r^4 \\ -3R^2 r^2 \mp 6Rr^3 \pm 3r^4 \\ \hline \varnothing \end{array}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{h\pi}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(67)}$$

116. Schwerpunktslage in einem Kugelsektor (Kugelausschnitt). Kugelhalbmesser r, Höhe der Kalotte $\overline{CD} = h$. — Fig. 97.

Auflösung: Man denke sich den Kugelsektor in unendlich viele Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen f sind und deren Spitzen sämtlich in M liegen. Alle diese Pyramiden haben ihre Schwerpunkte in der Entfernung $\frac{3}{4} r$ von M. Der geometrische Ort derselben ist eine Kalotte, die derjenigen, welche den Sektor begrenzt, ähnlich ist. Der Schwerpunkt des Sektors S fällt hiermit mit dem der neuen Kalotte zusammen.

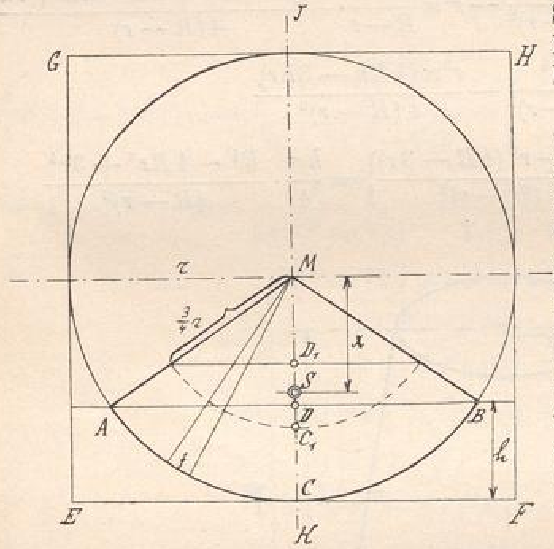

Fig. 97.

Beschreibt man um die Kugel, von welcher der Sektor ein Teil ist, einen sie einhüllenden Zylinder, so ist dessen Mantelfläche (Achse ist JK) gleich $2 r \pi \cdot 2 r = 4 r^2 \pi$, also gleich der Oberfläche der Kugel mit dem Radius r. — Daher muß der halbe Mantel des Zylinders gleich sein der Oberfläche der Halbkugel, allgemein ein Zylindermantel mit der Höhe h gleich der Oberfläche der Kalotte mit der Pfeilhöhe h. D. h. diese Oberflächen sind je $2 r \pi h$.

Weil nun der Zylindermantel seinen Schwerpunkt in der Hälfte seiner Höhe hat, so hat die Kalotte den ihren auch in halber Höhe. S, der Mittelpunkt von $\overline{D_1 C_1}$, ist somit der gesuchte Schwerpunkt des Kugelsektors.

Nun ist
$$\overline{MD_1} = \frac{3}{4} \overline{MD} = \frac{3}{4}(r - h)$$

$$\overline{D_1 C_1} = \overline{MC_1} - \overline{MD_1} = \frac{3}{4} r - \frac{3}{4}(r - h) = \frac{3}{4} h$$

$$\overline{D_1 S} = \frac{1}{2} \overline{D_1 C_1} = \frac{3}{8} h$$

$$\overline{MS} = \overline{MD_1} + \overline{D_1 S} = \frac{3}{4}(r - h) + \frac{3}{8} h = \frac{3}{4} r - \frac{3}{4} h + \frac{3}{8} h$$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{8}(2r - h)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(68)}$$

117. Schwerpunktslage in einem Kugelabschnitt. Pfeilhöhe des Abschnittes sei h, Radius der Kugel sei r — Fig. 98.

Auflösung: Das statische Moment der Kalotte muß gleich sein demjenigen des Kugelsektors, minus dem des Kegels. Momentenebene ist EE_1.

Zur Auflösung der Aufgabe müssen zunächst die Inhalte von Kugelsektor und von Kalotte gefunden werden. Der Sektor kann aus unendlich vielen Pyramiden, deren Grundflächen die Oberfläche der Kalotte bilden und deren Spitzen in O liegen, zusammengesetzt gedacht werden. Mithin wird sein

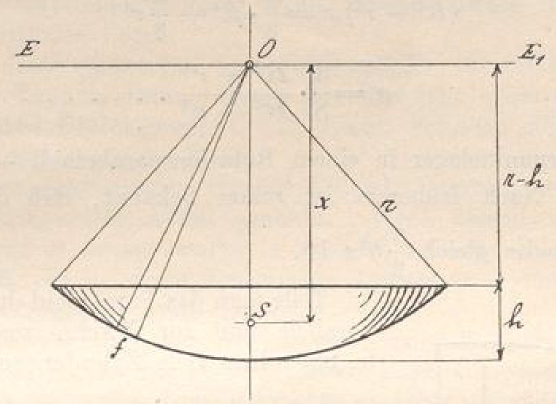

Fig. 98.

Inhalt $J_1 = 2r\pi h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$. — Der Inhalt der Kalotte ist dann

$$J_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h - [r^2 - (r-h)^2]\,\pi \cdot \frac{r-h}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h - (r^2 - r^2 + 2rh - h^2)\frac{\pi}{3}(r-h)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r h^2 + \frac{\pi r h^2}{3} - \frac{\pi}{3} h 3$$

$$J_2 = \pi r h^2 - \frac{\pi}{3} h^3 = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$$

Demnach ist

$$\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)\,x = \frac{2}{3}\pi r^2 h \cdot \frac{3}{8}(2r-h) - \frac{r^2-(r-h)^2}{3}\pi(r-h)\cdot\frac{3}{4}(r-h)$$

$$h(3r-h)\,x = \frac{3}{4}r^2(2r-h) - (2r-h)\cdot\frac{3}{4}(r-h)^2$$

$$x = \frac{3}{4}\cdot\frac{(2r-h)\cdot[r^2-(r-h)^2]}{h(3r-h)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{(2r-h)(2rh-h^2)}{h(3r-h)}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{4}\cdot\frac{(2r-h)^2}{3r-h}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(69)}$$

Für eine Halbkugel wird $h = r$, daher $x = \frac{3}{4}\cdot\frac{(2r-r)^2}{3r-r}$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{8}r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(70)}$$

Für eine hohle Halbkugel mit den Radien R und r gilt

$$\left(\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3\right) x = \frac{2}{3}\pi R^3 \cdot \frac{3}{8} R - \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot \frac{3}{8} r$$

$$(R^3 - r^3)\, x = \frac{3}{8} \cdot R^4 - \frac{3}{8} r^4$$

$$x = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

118. Schwerpunktslager in einem Rotationsparaboloid. — Fig. 99.

Auflösung: Nach früherem ist schon bekannt, daß der Inhalt eines Rotationsparaboloides gleich $\frac{\pi}{2} b^2 a$ ist.

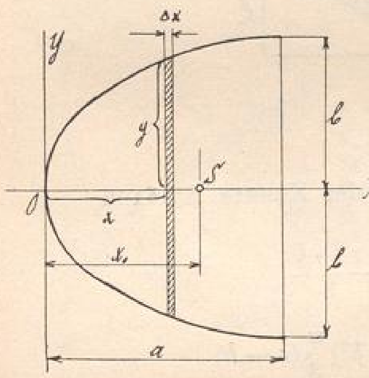

Fig. 99.

Teilt man das Paraboloid durch zur Y Achse parallele und zur X Achse senkrechte Ebenen in unendlich viele Zylinder, so gilt

$$\Sigma[(y^2 \pi \cdot \triangle x) \cdot x] = \frac{\pi}{2} b^2 a \cdot x_0$$

$$\Sigma(2 p x^2 \cdot \pi \cdot \triangle x) = \frac{\pi}{2} b^2 a \cdot x_0$$

$$2 p \pi \cdot \Sigma(x^2 \cdot \triangle x) = \frac{\pi}{2} b^2 \cdot a \cdot x_0$$

Da $b^2 = 2pa$ ist, wird

$$\frac{b^2}{a} \pi \cdot \Sigma(x^2 \cdot \triangle x) = \frac{\pi}{2} b^2 a x_0$$

Die Summe $x^2 \cdot \triangle x$ ist zu bilden von $x = 0$ bis $x = a$. — Zu diesem Ende werde eine quadratische Pyramide, Fig. 100, deren Basis die Seite a hat und deren Höhe a ist, gedacht. Wird sie in der Entfernung x und in der Entfernung $x + \triangle x$ von der Spitze durch zur Basis parallele Ebenen geschnitten, so entsteht zwischen denselben ein kleiner Körper vom Inhalte $x^2 \cdot \triangle x$. — Denkt man sich die ganze Pyramide aus lauter solchen kleinen Körpern gebildet, so wird

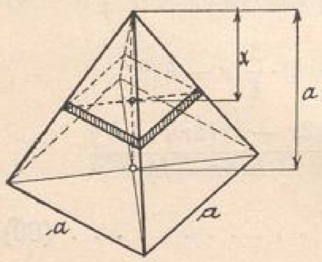

Fig. 100.

$$\Sigma(x^2 \cdot \triangle x) = a^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{3}$$

Daher wird

$$\frac{b^2}{a} \cdot \pi \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{\pi}{2} \cdot b^2 \cdot a \cdot x_0$$

$$\frac{1}{3} a = \frac{1}{2} x_0 \quad \text{oder}$$

$$x^0 = \frac{2}{3} a \quad \ldots\ldots \quad (72)$$