Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 30. Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad. Beispiele 119-129

§ 29. Die drei möglichen Gleichgewichtsfälle.

Wirkt auf einen in einem einzigen Punkte unterstützten (z. B. aufgehängten) Körper nur das in seinem Schwerpunkte angreifende Eigengewicht, so befindet sich der Körper im Gleichgewichte, wenn Unterstützungs- und Schwerpunkt in derselben Vertikalen liegen.

a) Fallen Unterstützungs- und Schwerpunkt zusammen, so bleibt der Körper in jeder Lage in Ruhe. Dieses Gleichgewicht heißt **unentschiedenes oder indifferentes Gleichgewicht**. In diesem befinden sich z. B. um horizontale Achsen sich drehende Räder.

b) Liegt der Schwerpunkt unterhalb des Unterstützungspunktes, so wird des Körpers Gleichgewicht **stabil** genannt. Wird derselbe aus seiner Lage gebracht, so kehrt er immer wieder in dieselbe zurück. In stabilem Gleichgewichte ist z. B. ein in einem Endpunkte aufgehängter und in einer vertikalen Ebene schwingender Stab (Pendel).

c) Befindet sich aber der Schwerpunkt eines Körpers oberhalb seines Unterstützungspunktes, so ist nur in diesem Falle Gleichgewicht vorhanden. Wird der Körper aus seiner Lage gebracht, so kehrt er nicht wieder in diese zurück. Diese Art des Gleichgewichtes heißt **labiles Gleichgewicht**. In demselben befindet sich z. B. ein auf seiner Spitze balanciertes Schwert, eine mit ihrem Schwerpunkte auf eine Nadelspitze gesetzte homogene Platte usw.

§ 30. Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad.

Aus der Einleitung ist schon bekannt, daß jeder freie Körper unter dem Einflusse einer Kraft in Bewegung gesetzt wird. Die Wirkung der Kraft auf einem bestimmten Wege heißt nun die **Arbeit** (auch **mechanische Arbeit**) der Kraft.

Letztere ist nun direkt proportional der Größe des Weges, aber unabhängig von der Zeit, in welcher sie zustande kommt.

Der mathematische Ausdruck für die Größe der Arbeit ist daher

$$A = P \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

Die Wirkung der Kraft ist nun nichts anderes als die Überwindung eines Widerstandes während des Weges, z. B. beim Heben von Lasten die Überwindung des Gewichtes derselben, bei gleichförmiger Bewegung die Überwindung der Reibung zwischen Körper und seiner Unterlage, bei gleichförmig beschleunigter Bewegung die Überwindung der Reibung und die Überwindung des Widerstandes des Körpers gegen die Annahme der Beschleunigung, d. h. die Überwindung der Trägheit.

Die Arbeitseinheit ist jene Arbeit, welche 1 kg auf dem Wege 1 m leistet. Sie heißt ein **Meterkilogramm** und wird abgekürzt 1 **mkg** geschrieben.

Zum Heben der Last $Q = 100$ kg auf eine Höhe von 1,5 m sind 150 mkg, zum Fortziehen eines Körpers auf einer horizontalen Ebene mittelst einer Kraft $P = 15$ kg auf einem Wege von 5 m sind 75 mkg nötig.

Andere Arbeitseinheiten werden später noch angegeben werden.

Die Arbeit pro Zeiteinheit

$$L = \frac{A}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

wird **Leistung** oder **Effekt** genannt. Einheit der Leistung ist ein **Meterkilogramm pro Sekunde**, auch **Sekundenmeterkilogramm** genannt. Die abgekürzte Bezeichnung für diese Leistungseinheit ist **mkg/sek**

Diese letztere Einheit ist für die Technik zu klein. Es wurde daher eine größere aus 75 mkg/sek gebildet und diese eine **PS**, d. h. eine **Pferdestärke** genannt.

$$\mathbf{1\,PS = 75\,mkg/sek} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{(75)}$$

Die englische Bezeichnung für 75 mkg/sek, nämlich HP (horse-power) ist in Deutschland jetzt nicht mehr üblich.

Will man L mkg/sek in PS verwandeln, so muß man dieselben durch 75 dividieren. Die Leistung in PS ist demnach

$$\boldsymbol{N = \frac{L}{75}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{(76)}$$

Behufs Übertragung der Wirkungen von Kräften werden Maschinen angewandt. Die von denselben aber abgenommenen Leistungen sind immer geringer als die theoretisch möglichen der ausgenützt werden sollenden Kräfte. Das Verhältnis aus der Nutzleistung einer Maschine zur theoretischen, welche vorhanden wäre, wenn innerhalb der Maschine keinerlei Effektsverluste entstehen würden, heißt der **Wirkungsgrad** der Maschine. Wird die Nutzleistung mit N_n bezeichnet, die theoretisch mögliche mit N, dann lautet die Formel für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{N_n}{N} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{(77)}$$

Der Wirkungsgrad einer Maschine ist keine durch Rechnung bestimmbare Zahl, sondern nur ein Erfahrungswert. Bestimmt wird er, wie später gezeigt werden wird, durch Bremsen.

Beispiele.

119. Wie groß ist die Arbeit eines Spaziergängers während eines 1500 m langen und horizontal verlaufenden Weges unter der Annahme, daß sich sein 75 kg schwerer Körper bei jedem 75 cm langen Schritte um 25 mm hebt?

Auflösung: Während eines Weges von 1500 m hebt sich der Körper des Spaziergängers um $25 \cdot \frac{1500}{0,75}$ mm $= \frac{1500}{0,03}$ mm $= 50000$ mm $= 50$ m. — Daher ist seine geleistete Arbeit

$$A = 75 \cdot 50 \text{ mkg}$$
$$\boldsymbol{A = 3750\,\mathrm{mkg}}$$

120. An einem Wasserfall stürzen pro Minute 20 cbm Wasser 10 m hoch herab. Wieviel PS gehen hier verloren?

Auflösung:
$$N = \frac{20000 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}}{60 \cdot 75}$$
$$\boldsymbol{N \sim 44{,}5\,\mathrm{PS}}$$

121. Wie lautet allgemein die Formel für die Leistung einer Turbine, durch welche pro Sekunde Q cbm Wasser fließen und welche ein Gefälle von H m ausnutzt, wenn ihr Wirkungsgrad $\eta = 0,75$ beträgt?

$$N_n = 0,75 \cdot \frac{(Q \cdot 1000 \text{ kg}) \cdot H \text{ m}}{75} \text{ PS}$$
$$\boldsymbol{N_n = 10\,QH}$$

122. Wieviele PS sind zum Betriebe einer Dampfspritze, welche pro Sekunde 50 l Wasser 15 m hoch werfen soll, erforderlich, wenn die Reibungsverluste unberücksichtigt gelassen werden?

Auflösung: $$N = \frac{50 \cdot 15}{75} = \mathbf{10\,PS}$$

123. An den Enden eines Fadens, der über zwei im Abstande 2 l befindlichen Röllchen geht, hängen die zwei gleichen Gewichte mg — In der Mitte der Röllchen wird nun auf den Faden das Gewicht $m' \cdot g$ gelegt. Wie tief fällt dasselbe? Fig. 101.

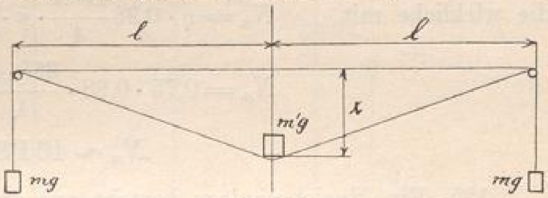

Fig. 101.

Auflösung: Die Arbeit des fallenden Gewichtes $m'g$ ist $m'g \cdot x$ — Dieselbe muß gleich sein der zur Hebung der Gewichte mg nötigen zwei gleichen Arbeiten. Letztere sind je

$$mg\,(\cdot \sqrt{l^2 + x^2} - l).$$

Somit existiert die Beziehung

$$m' \cdot g \cdot x = 2\,mg\,[\sqrt{l^2 + x^2} - l]$$

$$(m'x + 2\,ml)^2 = 4\,m^2(l^2 + x^2)$$

$$m'^2 \cdot x^2 + 4\,mm'l \cdot x + 4\,m^2 l^2 = 4\,m^2 l^2 + 4\,m^2 x^2$$

$$m'^2 \cdot x + 4\,mm'l = 4\,m^2 \cdot x$$

$$x\,(4\,m^2 - m'^2) = 4\,mm'l$$

$$\boldsymbol{x = \frac{4\,mm'l}{4\,m^2 - m'^2}}$$

124. In dem Zylinder einer Dampfmaschine beträgt der mittlere Dampfdruck $p = 2$ kg/qcm. Der Zylinder hat eine Bohrung $D = 360$ mm, der Hub beträgt $S = 600$ mm. Die Tourenzahl der Maschine ist $n = 100$, ihr Wirkungsgrad ist $\eta = 0{,}75$. Wie groß ist die Leistung dieser Maschine?

Auflösung: Der nützliche Zylinderquerschnitt ist gleich $\frac{D^2\pi}{4}$ minus dem Querschnitte der Kolbenstange. Da letzterer den Durchmesser $\frac{D}{7}$ besitzt, ist demnach der erstere

$$\frac{D^2\pi}{4} - \frac{\left(\frac{D}{7}\right)^2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{4} D^2 \left(1 - \frac{1}{49}\right) \sim \frac{\pi}{4} D^2 \left(1 - \frac{1}{50}\right), \text{ also}$$

$$0{,}98 \frac{\pi}{2} D^2$$

Der Totaldruck auf den Kolben wird dann

$$0{,}98 \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot p \text{ kg}$$

Der Weg des letzteren in einer Sekunde beträgt

$$\frac{2\,S\,n}{60} = \frac{n\,S}{30} \text{ Meter.}$$

Die theoretische Leistung der Maschine ergibt sich daher mit

$$N = 0{,}98 \frac{D^2\,\pi}{4} \cdot p \cdot \frac{n\,S}{30 \cdot 75} \text{ PS}$$

die wirkliche mit
$$N_n = \eta \cdot 0{,}98 \frac{D^2\,\pi}{4} \cdot p \cdot \frac{n\,S}{30 \cdot 75} \text{ PS}$$

$$N_n = 0{,}75 \cdot 0{,}98 \cdot \frac{36^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2 \cdot \frac{100 \cdot 0{,}6}{30 \cdot 75} \text{ PS}$$

$$\boldsymbol{N_n \sim 40 \text{ PS}}$$

125. Eine Speicheranlage besteht aus zwei Aufzügen für je 1000 kg Nutzlast und 20,5 m Förderhöhe und einem Kran für 1500 kg Nutzlast und 11 m Förderhöhe. Der Antrieb der Hebemaschinen ist hydraulisch, der Betriebsdruck 50 Atm. In Betrieb sind immer ein Aufzug und der Kran. Die Förderschale jedes Aufzugs wiege 150 kg, das Hakengewicht an der Krankette sei 50 kg. Die Hubgeschwindigkeit der Lasten darf höchstens 0,5 m/sek betragen. Welche Leistung muß die Druckpumpe, die das Betriebswasser liefert, haben, falls ihr Wirkungsgrad mit 0,85 angenommen wird? Der Wirkungsgrad der Hebezeuge ist 0,7 —

Auflösung: Jeder Hub erfordert 40 Sekunden. Wird behufs Aufsetzens und Abnehmens der Last je 1 Minute gerechnet, so können die Hebezeuge alle 3 Minuten bedient werden.

Die Betriebspumpe hat also den nötigen Wasserbedarf in 3 Minuten zu decken.

Für jeden Aufzug ist eine Betriebsarbeit von

$$\frac{1150 \cdot 20{,}5}{0{,}7} \text{ mkg}$$

erforderlich. Ein kg Druckwasser hat eine Arbeitsfähigkeit von 500 mkg, da es eine Wassersäule 500 m hoch zu heben vermag. Zur Arbeit $\frac{1150 \cdot 20{,}5}{0{,}7}$ mkg sind somit so viele kg (Liter) Druckwasser nötig als 500 in $\frac{1150 \cdot 20{,}5}{0{,}7}$ enthalten ist.

$$x_1 = \frac{1150 \cdot 20{,}5}{0{,}7 \cdot 500} = 67 \text{ l}$$

Desgleichen braucht man pro Hub des Kranes

$$x_2 = \frac{1550 \cdot 11}{0{,}7 \cdot 500} = 49 \text{ l}$$

Zusammen sind daher $x \sim 125$ l Wasser nötig, wenn 9 l als Ersatz für Verluste in Rechnung gestellt werden.

Pro Sekunde hat die Betriebspumpe

$$\frac{125}{3} \cdot \frac{1}{60 \cdot 0{,}85} \text{ l}$$

Wasser zu liefern. Da die Arbeitsfähigkeit von 1 kg Wasser pro Sekunde $\frac{500}{75}$ mkg beträgt, ist die Leistung der Pumpe

$$N_n = \frac{125 \cdot 500}{3 \cdot 60 \cdot 0{,}85 \cdot 75} \text{ PS}$$

$$\boldsymbol{N_n \sim 5{,}5 \text{ PS}}$$

126. Die mechanische Arbeit, welche eine Kraft P leisten muß, um einen in sicherer Gleichgewichtslage befindlichen Körper in die unsichere, d. h. seinen Schwerpunkt S, Fig. 102, vertikal über seine Kippkante zu bringen, heißt **dynamische Standsicherheit.** Das statische Moment des Eigengewichtes des Körpers in bezug auf die Kippkante heißt **Stabilitäts- oder Standsicherheitsmoment.**

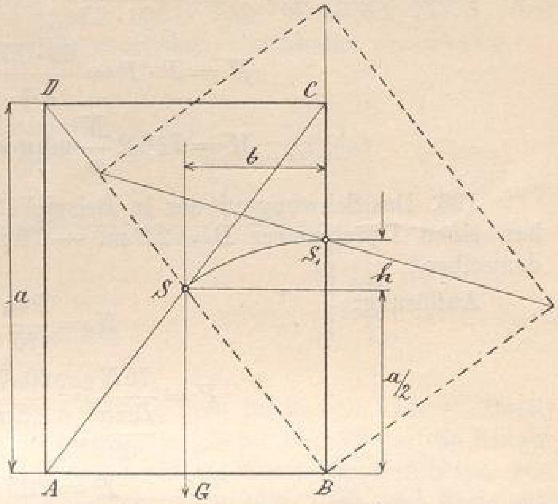

Fig. 102.

Erstere ist . . . . $\boldsymbol{A = G \cdot h}$ . . . . **(78)**

Letztere bestimmt sich mit $\boldsymbol{M = G \cdot b}$ . . . . **(79)**

Ein parallelopipedischer Gußeisenblock $ABCD$, Fig. 102, hat $a = 0{,}5$ m Höhe, $b = 0{,}3$ m Breite und $c = 0{,}2$ m Tiefe. Wie groß ist dessen Standsicherheitsmoment und wie groß ist die mechanische Arbeit, um den Block umzuwerfen, wenn das spezifische Gewicht des letzteren $\gamma = 7200$ kg/cbm beträgt?

Auflösung: Das Gewicht des Blocks ist

$$G = 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 7200 = 0{,}03 \cdot 7200 \text{ kg}$$

$$G = 216 \text{ kg}$$

Das Standsicherheitsmoment in bezug auf die Kante B ist somit

$$M = 216 \cdot 0{,}15 \text{ mkg}; \qquad \boldsymbol{M = 32{,}4 \text{ mkg}}$$

Das Maß, um welches der Schwerpunkt gehoben werden muß, beträgt

$$h = \overline{BS_1} - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{a}{2} = \sqrt{0{,}25^2 + 0{,}15^2} - 0{,}25$$

$$h \sim 0{,}06 \text{ m}$$

Folglich ist die dynamische Standsicherheit

$$A = 216 \cdot 0{,}06$$

$$\boldsymbol{A = 12{,}96 \text{ mkg}}$$

127. Eine Scheibe hat N PS bei n Touren zu übertragen. Wie groß ist das an ihrem Umfange wirkende Drehmoment?

Auflösung: Die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe ist $v = \frac{2 R \pi n}{60}$ Meter, wenn der Scheibenradius R in Metern eingesetzt ist. Ist nun P kg die Umfangskraft an der Scheibe, so überträgt dieselbe den Effekt

$$\boldsymbol{N = \frac{P \cdot v}{75}} \quad \text{. . . . .} \quad \textbf{(80)}$$

Daher ergibt sich $N = \frac{P \cdot 2 R \pi n}{60 \cdot 75}$ und daraus

$$M = P \cdot R = \frac{60 \cdot 75}{2 \pi} \cdot \frac{N}{n} \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{M = 716{,}2 \frac{N}{n} \text{ mkg} = 716\,200 \frac{N}{n} \text{ mmkg}} \quad . \; . \; . \; . \; (81)$$

128. Das Schwungrad der in Beispiel 124 dimensionierten Dampfmaschine hat einen Durchmesser $D = 2{,}8$ m. — Wie groß ist die Umfangskraft an demselben?

Auflösung:

$$N = \frac{P \cdot v}{75}$$

$$P = \frac{75 N}{\frac{D \pi n}{60}} = \frac{60 \cdot 75 \cdot 40}{2{,}8 \pi \cdot 100}$$

$$\boldsymbol{P = 205 \text{ kg}}$$

129. Das treibende Kegelrad einer vertikal geachsten Turbine hat einen Durchmesser $D = 3440$ mm und muß eine Leistung von $N = 246$ PS bei $n = 46$ Touren übertragen. Wie groß ist der Zahndruck in diesem Kegelrade?

$$v = \frac{D \pi n}{60} = \frac{3{,}44 \cdot \pi \cdot 46}{60}$$

$$v = 8{,}25 \text{ m}$$

$$\frac{Z \cdot v}{75} = N$$

$$Z = \frac{75 \cdot 246}{8{,}25}$$

$$\boldsymbol{Z = 2225 \text{ kg}}$$

---

§ 31. Die gleitende Reibung.

Der fortschreitenden Bewegung eines Körpers von bestimmtem Materiale auf irgend einer Unterlage wirkt immer eine dieselbe verzögernde Ursache entgegen. — Man nennt letztere die **gleitende Reibung.** — Sie wird bedingt durch das Gewicht des Körpers, durch die Unebenheiten der Auflagefläche des Körpers und durch die seiner Unterlage, sowie durch die Art des Materiales beider, endlich zum Teil durch die Adhäsion.

Je nachdem Körper und Unterlage in direkter oder indirekter Berührung sind — letzteres ist der Fall bei Anwendung von Schmiermitteln —, unterscheidet man direkte (unmittelbare) und indirekte (mittelbare) Reibung.

Ein Schlitten sei durch ein Gewicht belastet und mit demselben Q kg schwer. — Am Ende des Schlittens, Fig. 103, ist eine Schnur befestigt, welche über eine Rolle geführt wird und an deren Ende sich ein Gewicht befindet. Dasselbe wird nun so groß genommen, daß ein Anstoß an den Schlitten genügt, um ihn in gleichförmige Bewegung zu setzen. Dann stellt P jene Kraft vor, welche die Reibung überwindet und zwar deshalb, weil die Be-