Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

B. Graphische Methode von Mohr mit Hülfe des Kräfteplans und des Kräftepolygons.

urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

statische Moment M_x der Fläche F in Bezug auf die X-Achse dar.

Wiederholt man dasselbe mit der Fläche F_1, so entsteht durch die neue Konstruktion eine Fläche F_2 über CD. Diese stellt das statische Moment zu F_1 und zugleich das Trägheitsmoment T_x für F dar, denn es ist $AQ_1 = fy$, folglich $P_0 P_2 = fy^2$, folglich

$$F_1 = \sum fy^2 = T_x.$$

258) **Bemerkung.** Wählt man $OA = b$, so wird $bF_1 = M_x$ und $b^2 F_2 = T_x$, wie leichte Rechnungen zeigen. Dabei kommt die dritte bezw. vierte Dimension von M_x bezw. T_x zum Vorschein.

Ist die Fläche anders gestaltet, so lassen sich die Querschnitte nach Cavalieri an die Gerade CD verschieben, wodurch nichts geändert wird. Man kann aber auch die wie in Figur 188 durch OY getrennten Teile gesondert behandeln und dann addieren bezw. die Resultate für $ABCDE$ und $ABFDE$ in Figur 189 durch Subtraktion mit einander verbinden.

Fig. 188.

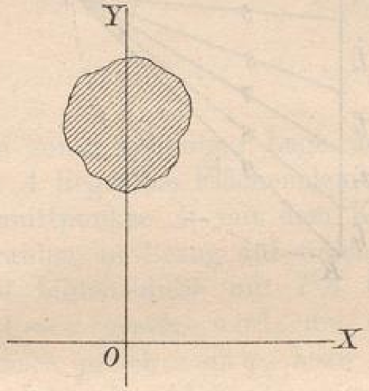
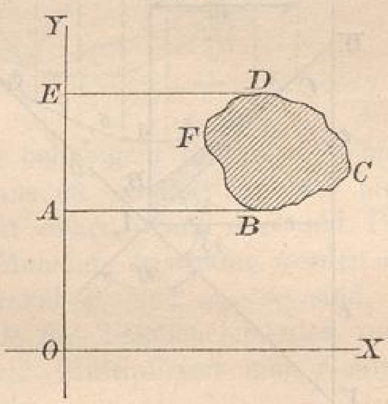


Fig. 189.



Die Methode ist einfach und brauchbar, wenn man die Flächen mit Hülfe des Polarplanimeters zu bestimmen versteht.

B. Graphische Methode von Mohr mit Hülfe des Kräfteplans und Kräftepolygons.

259) Man bestimme, wie in Nr. 18 mit Hülfe des Kräfteplans das Kräftepolygon und die Schwerpunktsachse $A_1 S$, nur wähle man P als den symmetrisch teilenden Punkt des Halbkreises über

$$AK = f = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n.$$

Im Kräftepolygon ist $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABP$, so dafs sich die Inhalte wie die Quadrate der Höhen über A_1B_1 bezw. AB verhalten, die gleich x_1 bezw. $\frac{1}{2}f$ sind. Also:

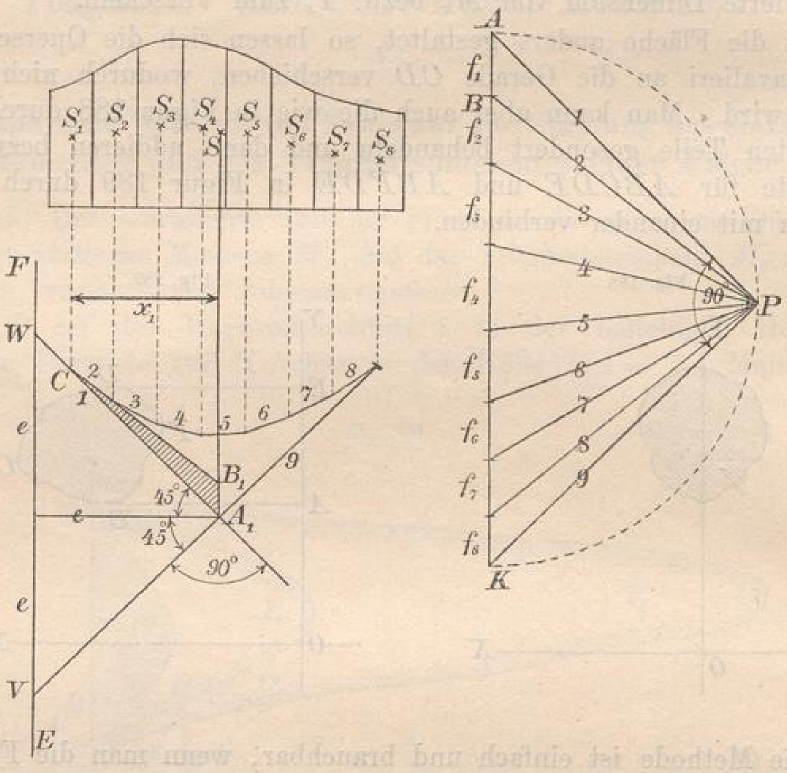
$$\triangle A_1B_1C : \tfrac{1}{2}f_1 \cdot \frac{f}{2} = x_1^2 : \left(\frac{f}{2}\right)^2,$$

folglich

$$f_1x_1^2 = \triangle A_1B_1C \cdot f.$$

Bei unendlich schmalen Streifen ist aber $f_1x_1^2$ das Trägheitsmoment des ersten Streifens in Bezug auf die Schwerpunktsachse A_1S.

Fig. 190.



Ebenso ist es mit den andern Streifen, d. h. es ist das Trägheitsmoment der Fläche f

$$T_s = \sum f_n x_n^2 = F \cdot f,$$

wo F die Fläche des Kräftepolygons ist, also gleich dem Produkte aus der gegebenen Fläche und der Fläche des Kräftepolygons.

Bemerkung. Verschiebt man die Schwerpunktsachse um e (parallel zu sich selbst), so wird nach Nr. 27

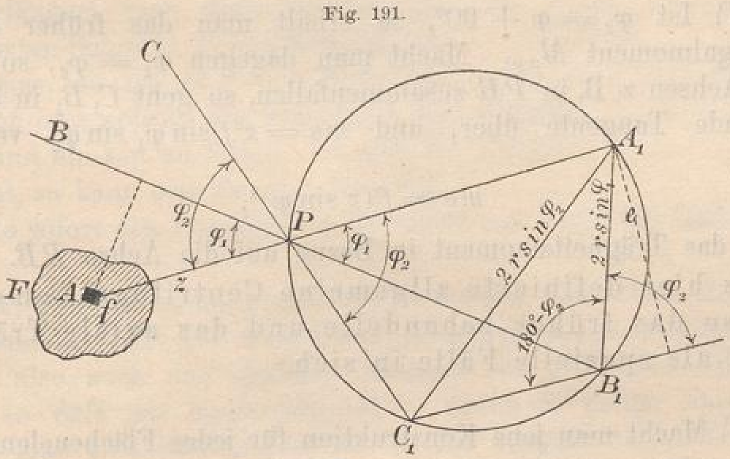
$$T = T_s + e^2 f = Ff + e^2 f = f(F + e^2),$$

d. h. zum Kräftepolygon ist noch die Fläche $A_1 VW = e^2$ hinzuzufügen.

C. Andere Methode von Mohr, auf Benutzung eines Hülfskreises gestützt.

260) Um das Trägheitsmoment und das Centrifugalmoment einer Fläche F in Bezug auf Achsen zu bestimmen, die durch einen gegebenen Pol P gehen, benutzt Mohr einen durch P gehenden Kreis

Fig. 191.



von sonst beliebiger Lage und von beliebigem Radius r. Von dem bei A liegenden Flächenelemente f aus ist ein Polstrahl AP bis zum Schnittpunkte A_1 mit dem Kreise zu ziehen. Sind PB und PC die Strahlen, in Bezug auf welche die Momente bestimmt werden sollen, und bilden diese mit PA die Winkel φ_1 und φ_2, so sind, wenn $PA = z$ gesetzt wird, die Abstände des Flächenelementes von den Achsen gleich $z \sin \varphi_1$ bezw. $z \sin \varphi_2$. Multipliziert man f mit dem Produkte der Abstände, so erhält man

$$f \cdot z^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

und dieser Ausdruck wird als das Centrifugalmoment oder Deviationsmoment des Elementes f in Bezug auf die Achsen PB und PC definiert. Dies ist allgemeiner, als die frühere Definition, bei der es sich nur um Achsen handelte, die sich unter 90^0 schneiden.

Man verlängere die beiden Achsen bis zu den Kreispunkten B_1 und C_1, was zu Kreissehnen $A_1 B_1 = 2r \sin \varphi_1$, $A_1 C_1 = 2r \sin \varphi_2$ und $B_1 C_1 = 2r \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ Veranlassung giebt. A_1 hat von der letzteren Sehne einen Abstand $e = 2r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$, wie sich leicht aus der Figur ergiebt.