Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

C. Andere Methode von Mohr, auf Benutzung eines Hülfskreises gestützt.

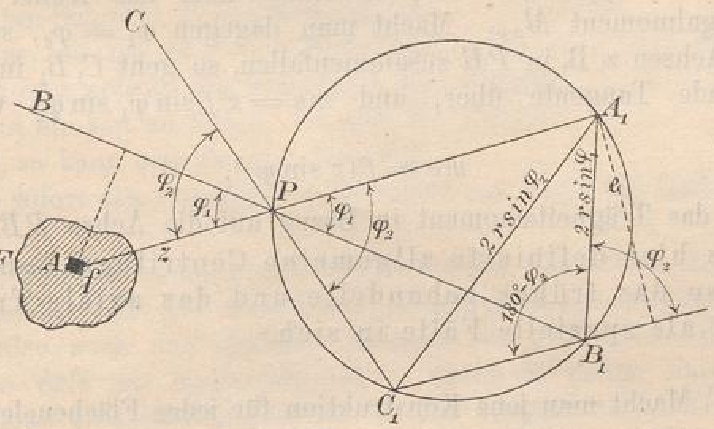
$$T = T_s + e^2 f = Ff + e^2 f = f(F + e^2),$$

d. h. zum Kräftepolygon ist noch die Fläche $A_1 V W = e^2$ hinzuzufügen.

C. Andere Methode von Mohr, auf Benutzung eines Hülfskreises gestützt.

260) Um das Trägheitsmoment und das Centrifugalmoment einer Fläche F in Bezug auf Achsen zu bestimmen, die durch einen gegebenen Pol P gehen, benutzt Mohr einen durch P gehenden Kreis

Fig. 191.



von sonst beliebiger Lage und von beliebigem Radius r. Von dem bei A liegenden Flächenelemente f aus ist ein Polstrahl AP bis zum Schnittpunkte A_1 mit dem Kreise zu ziehen. Sind PB und PC die Strahlen, in Bezug auf welche die Momente bestimmt werden sollen, und bilden diese mit PA die Winkel φ_1 und φ_2, so sind, wenn $PA = z$ gesetzt wird, die Abstände des Flächenelementes von den Achsen gleich $z \sin\varphi_1$ bezw. $z \sin\varphi_2$. Multipliziert man f mit dem Produkte der Abstände, so erhält man

$$f \cdot z^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2,$$

und dieser Ausdruck wird als das Centrifugalmoment oder Deviationsmoment des Elementes f in Bezug auf die Achsen PB und PC definiert. Dies ist allgemeiner, als die frühere Definition, bei der es sich nur um Achsen handelte, die sich unter 90^0 schneiden.

Man verlängere die beiden Achsen bis zu den Kreispunkten B_1 und C_1, was zu Kreissehnen $A_1 B_1 = 2r\sin\varphi_1$, $A_1 C_1 = 2r\sin\varphi_2$ und $B_1 C_1 = 2r\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ Veranlassung giebt. A_1 hat von der letzteren Sehne einen Abstand $e = 2r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2$, wie sich leicht aus der Figur ergiebt.

Jetzt liegt es nahe, in A_1 eine Masse von der Gröfse

$$m = \frac{z^2}{2r} f$$

anzubringen, denn deren statisches Moment in Bezug auf $C_1 B_1$ wird gleich

$$me = \frac{z^2}{2r} f \, 2r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = z^2 f \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

d. h. gleich dem Centrifugalmomente des Flächenelementes in Bezug auf die zu $B_1 C_1$ gehörigen Achsen PB und PC.

261) Ist $\varphi_2 = \varphi + 90^0$, so erhält man das früher definierte Centrifugalmoment M_{xy}. Macht man dagegen $\varphi_1 = \varphi_2$, so dafs die beiden Achsen z. B. in PB zusammenfallen, so geht $C_1 B_1$ in die in B_1 berührende Tangente über, und $me = z^2 f \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$ verwandelt sich in

$$me = f (z \sin \varphi)^2,$$

d. h. in das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse PB.

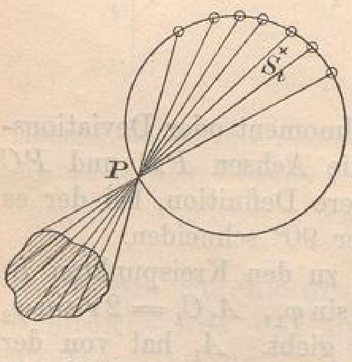
Das hier definierte allgemeine Centrifugalmoment enthält also das früher behandelte und das axiale Trägheitsmoment als spezielle Fälle in sich.

262) Macht man jene Konstruktion für jedes Flächenelement f, so erhält man für die ganze Fläche $\sum f = F$ auf einem Kreisbogen die gesamte Hülfsmasse

$$\sum \frac{fz^2}{2r} = \frac{1}{2r} \sum f z^2 = \frac{T_p}{2r} = \frac{F \varrho_p^2}{2r},$$

wo T_p das polare Trägheitsmoment von F in Bezug auf den Pol P und ϱ_p den zugehörigen Trägheitsradius bedeutet.

Fig. 192.

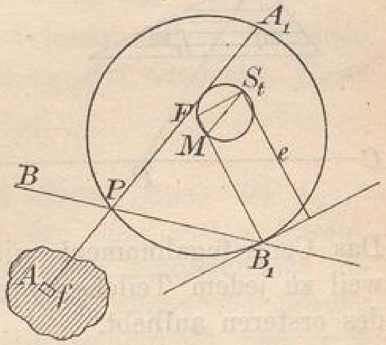


Das statische Moment der gesamten Hülfsmasse in Bezug auf $B_1 C_1$ ist dann gleich dem Centrifugalmoment von F in Bezug auf PB und PC. Diese Hülfsmassen haben einen Schwerpunkt S_t, der als Trägheitsschwerpunkt der Fläche F in Bezug auf den Pol P (und den gewählten Halbkreis) bezeichnet werden soll. In ihm denke man sich die gesamte Hülfsmasse vereinigt.

Fällt man dann von S_t aus ein Lot auf $B_1 C_1$ und multipliziert man dessen Länge mit der Hülfsmasse, so hat man wiederum ein statisches Moment, welches gleich dem Centrifugal- (bezw. Trägheits-) Moment von F ist.

263) Eine kleine Vereinfachung wird für das Trägheitsmoment noch dadurch erzielt, dafs man S_t mit dem Mittelpunkte M des Hülfskreises verbindet und über $S_t M$ als Durchmesser einen zweiten Hülfskreis zeichnet. Verbindet man dann den Berührungspunkt B_1 der Tangente mit M und verlängert man diese Gerade bis zum zweiten Schnitte F mit dem kleinen Hülfskreise, so ist $B_1 F = e$, und man hat nicht erst nöthig, die Tangenten zu ziehen und ein Lot zu fällen. Ist also S_t bestimmt, so kann man für jede beliebige Tangente sofort den zugehörigen Hebelarm mit Hülfe des Radius finden.

Fig. 193.



264) Kommt es hauptsächlich darauf an, nur solche Achsenpaare zu behandeln, für die das Centrifugalmoment verschwindet, für die also auch das statische Moment der Hülfsachse gleich Null ist — so dafs die Kreissehne $B_1 C_1$ durch S_t gehen mufs —, so braucht man sich vorläufig nicht um das Vorzeichen des Centrifugalmomentes zu bekümmern. [Es ist für f positiv, wenn die von f aus gefällten Lothe auf derselben Seite von z liegen, negativ, wenn z zwischen diesen Loten liegt.]

265) Geht $B_1 C_1$ durch S_t, so bezeichnet man PB und PC als konjugierte Achsen. Zu jedem PB ist die konjugierte Achse PC

Fig. 194.

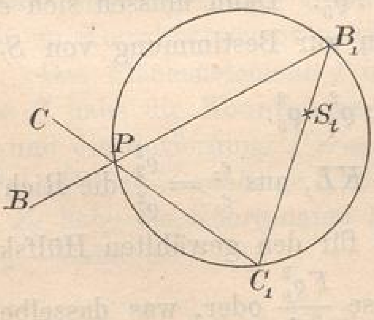
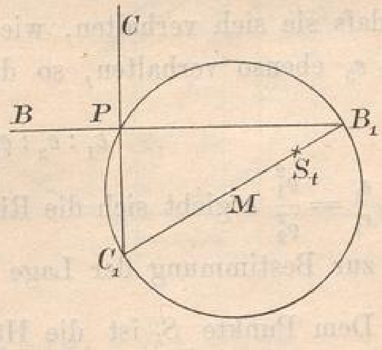


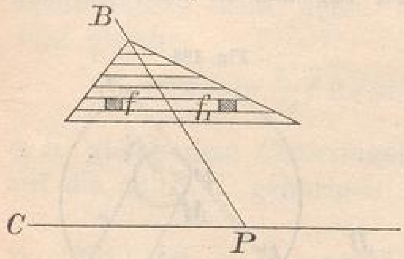
Fig. 195.



leicht zu konstruieren. Geht $B_1 C_1$ sowohl durch S_t, als auch durch M, so hat man den besonderen Fall, dafs die konjugierten Achsen

PB und PC aufeinander senkrecht stehen. Dies ist der früher besprochene Fall der Hauptträgheitsachsen für den Pol P.

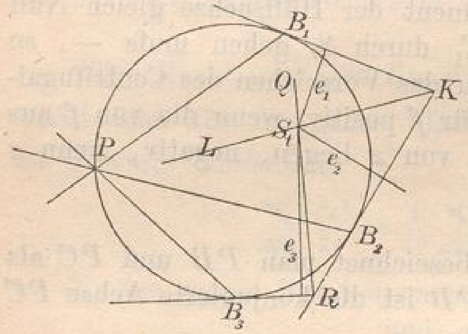
Fig. 196.



266) Den früher behandelten Symmetriefällen entspricht in allgemeinerer Weise Folgendes: Läfst sich die Fläche so in Parallelstreifen einteilen, dafs die Schwerpunkte der Streifen auf einer Geraden liegen, so ist die Richtung der Mittellinie PB konjugiert zur Streifenrichtung PC, PB und PC sind also ein Paar konjugierter Achsen. Das Centrifugalmoment wird nämlich in diesem Falle gleich Null, weil zu jedem Teilchen f ein andres f_1 gehört, dessen Moment das des ersteren aufhebt.

267) Gelingt es, die beiden Koordinaten von S_t zu bestimmen, ebenso das polare Trägheitsmoment T_p und mit dessen Hülfe die dem Punkte S_t beizulegende Hülfsmasse $\frac{F\varrho_p^2}{2r}$, so ist die Angelegenheit im wesentlichen erledigt.

Fig. 197.



Grundsätzlich ist die Aufgabe folgendermafsen zu lösen:

Man bestimmt die Trägheitsmomente auf irgend eine Weise für drei Achsen PB_1, PB_2 und PB_3. Sie mögen sein

$$F\varrho_1^2,\ F\varrho_2^2,\ F\varrho_3^2,$$

so dafs sie sich verhalten, wie $\varrho_1^2 : \varrho_2^2 : \varrho_3^2$. Dann müssen sich e_1, e_2 und e_3 ebenso verhalten, so dafs man zur Bestimmung von S_t hat

$$e_1 : e_2 : e_3 = \varrho_1^2 : \varrho_2^2 : \varrho_3^2.$$

Aus $\frac{e_1}{e_2} = \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}$ ergiebt sich die Richtung KL, aus $\frac{e_2}{e_3} = \frac{\varrho_2^2}{\varrho_3^2}$ die Richtung RQ zur Bestimmung der Lage von S_t für den gewählten Hülfskreis.

Dem Punkte S_t ist die Hülfsmasse $\frac{F\varrho_p^2}{2r}$ oder, was dasselbe ist, $\frac{F\varrho_1^2}{e_1} = \frac{F\varrho_2^2}{e_2} = \frac{F\varrho_3^2}{e_3}$ beizulegen.

Ist durch die Form der Fläche ein konjugiertes Achsenpaar als selbstverständlich bekannt, so braucht man nur noch eins der obigen Verhältnisse, z. B. $\frac{e_1}{e_2}$ zu berechnen, denn die Sehne des konjugierten Paares geht bereits durch S_t. Also ist nur noch die Berechnung zweier Trägheitsradien bezw. Trägheitsmomente nötig.

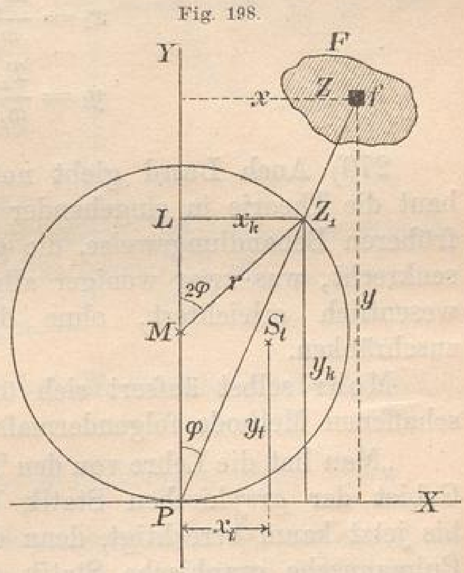
Kennt man dagegen zwei konjugierte Achsenpaare, so schneiden sich die zugehörigen Sehnen in S_t, so daſs es jetzt ausreicht, T_p zu kennen.

268) Die Mohrsche Abhandlung im 33sten Bande des Civil-Ingenieur beschäftigt sich eingehend mit der möglichsten Vereinfachung des Verfahrens, von dem hier nur der Grundgedanke angegeben werden sollte. Daſs die Methode eine allgemeine Lösung der betreffenden Aufgaben der Graphostatik ermöglicht und nach Überwindung der ersten Schwierigkeiten übersichtlicher erscheint, als die Culmannsche Methode, kann zugestanden werden.

D. Modifikation der Mohrschen Methode durch Land.

269) Weil bei Mohr die Berechnung der Koordinaten der Kreispunkte B_1, B_2, B_3 trigonometrische Funktionen nötig macht und auch die Berechnung der von der Lage der Kreispunkte abhängigen statischen Massenmomente unbequem ist, schlägt Land im 34ten Bande des Civil-Ingenieur folgenden Weg ein.

Fig. 198.



Die Tangente des Hülfskreises in P und der zugehörige Radius werden zu Koordinatenachsen gemacht. Das Flächenelement f im Punkte Z habe die Koordinaten x und y und die Entfernung $PZ = z$ vom Pol. Der zu Z gehörige Kreispunkt Z_1 habe die Koordinaten x_k und y_k. Dann ist

$$x_k = r \sin 2\varphi = 2r \sin\varphi \cos\varphi = 2r\frac{x}{z}\frac{y}{z} = 2r\frac{xy}{z^2};$$

$$y_k = PL = r + r\cos 2\varphi = r(1 + \cos 2\varphi) = 2r\cos^2\varphi = 2r\frac{y^2}{z^2}.$$