Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

D. Modifikation der Mohrschen Methode durch Land.

Ist durch die Form der Fläche ein konjugiertes Achsenpaar als selbstverständlich bekannt, so braucht man nur noch eins der obigen Verhältnisse, z. B. $\frac{e_1}{e_2}$ zu berechnen, denn die Sehne des konjugierten Paares geht bereits durch S_t. Also ist nur noch die Berechnung zweier Trägheitsradien bezw. Trägheitsmomente nötig.

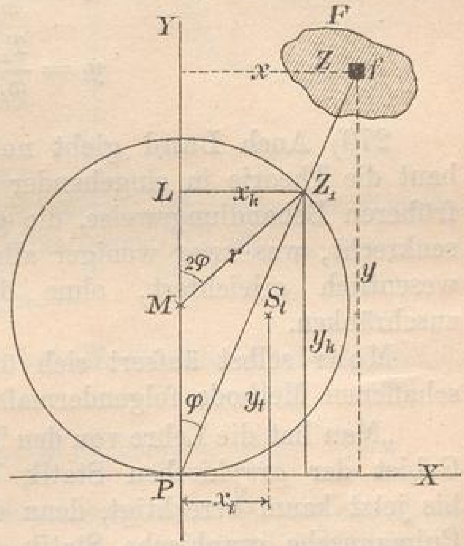
Kennt man dagegen zwei konjugierte Achsenpaare, so schneiden sich die zugehörigen Sehnen in S_t, so daſs es jetzt ausreicht, T_p zu kennen.

268) Die Mohrsche Abhandlung im 33sten Bande des Civil-Ingenieur beschäftigt sich eingehend mit der möglichsten Vereinfachung des Verfahrens, von dem hier nur der Grundgedanke angegeben werden sollte. Daſs die Methode eine allgemeine Lösung der betreffenden Aufgaben der Graphostatik ermöglicht und nach Überwindung der ersten Schwierigkeiten übersichtlicher erscheint, als die Culmannsche Methode, kann zugestanden werden.

D. Modifikation der Mohrschen Methode durch Land.

269) Weil bei Mohr die Berechnung der Koordinaten der Kreispunkte B_1, B_2, B_3 trigonometrische Funktionen nötig macht und auch die Berechnung der von der Lage der Kreispunkte abhängigen statischen Massenmomente unbequem ist, schlägt Land im 34ten Bande des Civil-Ingenieur folgenden Weg ein.

Fig. 198.



Die Tangente des Hülfskreises in P und der zugehörige Radius werden zu Koordinatenachsen gemacht. Das Flächenelement f im Punkte Z habe die Koordinaten x und y und die Entfernung $PZ = z$ vom Pol. Der zu Z gehörige Kreispunkt Z_1 habe die Koordinaten x_k und y_k. Dann ist

$$x_k = r \sin 2\varphi = 2r \sin\varphi \cos\varphi = 2r \frac{x}{z}\frac{y}{z} = 2r \frac{xy}{z^2};$$

$$y_k = PL = r + r\cos 2\varphi = r(1 + \cos 2\varphi) = 2r\cos^2\varphi = 2r\frac{y^2}{z^2}.$$

In Z_1 ist die Masse $m = \frac{fz^2}{2r}$ anzubringen, dann ist in Bezug auf die Y-Achse das statische Moment der Masse m

$$m \cdot x_k = \frac{fz^2}{2r} \cdot 2r \frac{xy}{z^2} = fxy,$$

d. h. gleich dem Centrifugalmoment des Massenteilchens f in Bezug auf beide Achsen. Dagegen ist in Bezug auf die Y-Achse

$$my_k = \frac{fz^2}{2r} 2r \frac{y^2}{z^2} = fy^2,$$

d. h. gleich dem Trägheitsmoment des Teilchens f in Bezug auf die X-Achse.

Ebenso wird $\sum mx_k = \sum fxy$ und $\sum my_k = \sum fy^2$. Die gesamte Hülfsmasse ist aber $\sum \frac{fz^2}{2r} = \frac{1}{2r} T_p = m_t$, also folgt, wenn y_t und x_t die Koordinaten von S_t sind,

$$m_t x_t = \sum fxy = M_{xy},$$

$$m_t y_t = \sum fy^2 = T_x.$$

Die Koordinaten von S_t sind also

$$x_t = \frac{M_{xy}}{m_t} = \frac{M_{xy}}{T_p} 2r$$

$$y_t = \frac{T_x}{m_t} = \frac{T_x}{T_p} 2r.$$

270) Auch Land giebt noch weitere Vereinfachungen an und baut die Theorie in eingehender Weise aus. Hier stehen, wie bei der früheren Behandlungsweise, die gewählten Achsen wieder aufeinander senkrecht, was zwar weniger allgemein ist, aber die Entwickelungen wesentlich erleichtert, ohne die technische Verwendbarkeit einzuschränken.

Mohr selbst äufsert sich über einen Vorzug der von ihm geschaffenen Methode folgendermafsen:

„Man hat die Lehre von den Trägheitsmomenten als das eigentliche Gebiet der graphischen Statik bezeichnet. Diese Behauptung war bis jetzt kaum berechtigt, denn die Trägheitsellipse, mit welcher die Culmannsche graphische Statik operiert, bildet die seit langer Zeit bekannte Darstellung einer auf analytischem Wege abgeleiteten Formel, der ein statischer Sinn nicht untergelegt wird, dasselbe gilt von den früher bekannt gewordenen Darstellungen (Zeitschr. des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins, Jahrgang 1870, S. 41—63 und

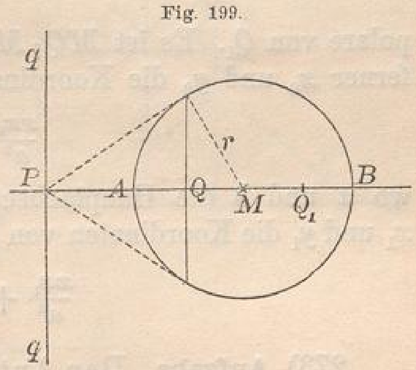
Jahrgang 1877, S. 51—62, ferner die Abhandlung von Lodge, Philosoph. magazine 1886, S. 453—458) der Trägheitsmomente durch Kreise, welche für die praktischen Anwendungen unzweifelhaft bequemer sind, als die Ellipsen. Erst durch die hier entwickelte Darstellung wird die Lehre von den Trägheitsmomenten auf diejenige von den statischen Momenten zurückgeführt und dadurch für das Gebiet der graphischen Statik gewonnen."

Mohr fährt dann damit fort, seine Zahlenrechnungen durch graphische Operationen zu ersetzen, letztere im Anschlufs an die Streckentheorie, wodurch er in der That Vereinfachungen erzielt.

E. Einige Eigenschaften und Anwendungen der Culmannschen Trägheitsellipse.

271) Geometrische Vorbemerkung. In Fig. 199 ist q die Polare von Q, so dafs $PQAB$ harmonische Punkte sind. Nach Pythagoras ist $r^2 = MQ \cdot MP$, also $MQ = \frac{r^2}{MP}$, eine Beziehung, die für $r = 1$ in die reciproke $MQ = \frac{1}{MP}$ übergeht. Macht man $MQ_1 = -MQ = -\frac{r^2}{MP}$, so hat man die entsprechende „negative Abbildung", und wie Q der Pol zu q heifst, so heifst Q_1 der Antipol zu q. Ebenso wie q Polare zu Q ist, ist q Antipolare zu Q_1.

Fig. 199.



Hat Q die Koordinaten x_0, y_0, so ist die Gleichung der Polaren q (vgl. Meth. Lehrbuch, II), vorausgesetzt, dafs M Nullpunkt des Koordinatensystems ist,

$$xx_0 + yy_0 = r^2.$$

[Ist letzteres nicht der Fall, sondern hat M die Koordinaten p und q, so ist die Gleichung von q

$$(x-p)(x_0-p) + (y-q)(y_0-q) = r^2.]$$

Ist M Nullpunkt, so sind die Koordinaten des Antipols $x_1 = -x_0$ und $y_1 = -y_0$. Die Gleichung von q lautet in diesen Koordinaten

$$xx_1 + yy_1 = -r^2$$

oder

$$xx_1 + yy_1 + r^2 = 0.$$