



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

E. Einige Eigenschaften und Anwendungen der Culmannschen Trägheitsellipse.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

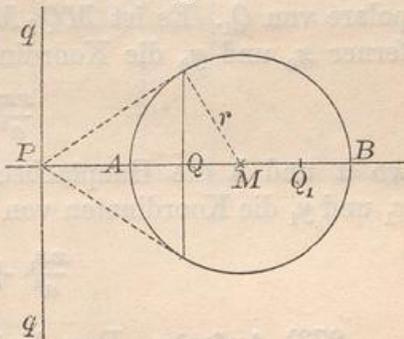
Jahrgang 1877, S. 51—62, ferner die Abhandlung von Lodge, Philosoph. magazine 1886, S. 453—458) der Trägheitsmomente durch Kreise, welche für die praktischen Anwendungen unzweifelhaft bequemer sind, als die Ellipsen. Erst durch die hier entwickelte Darstellung wird die Lehre von den Trägheitsmomenten auf diejenige von den statischen Momenten zurückgeführt und dadurch für das Gebiet der graphischen Statik gewonnen.“

Mohr fährt dann damit fort, seine Zahlenrechnungen durch graphische Operationen zu ersetzen, letztere im Anschluß an die Streckentheorie, wodurch er in der That Vereinfachungen erzielt.

E. Einige Eigenschaften und Anwendungen der Culmannschen Trägheitsellipse.

271) Geometrische Vorbemerkung. In Fig. 199 ist q die Polare von Q , so daß $PQAB$ harmonische Punkte sind. Nach Pythagoras ist $r^2 = MQ \cdot MP$, also $MQ = \frac{r^2}{MP}$, eine Beziehung, die für $r = 1$ in die reciproke $MQ = \frac{1}{MP}$ übergeht. Macht man $MQ_1 = -MQ = -\frac{r^2}{MP}$, so hat man die entsprechende „negative Abbildung“, und wie Q der Pol zu q heißt, so heißt Q_1 der Antipol zu q . Ebenso wie q Polare zu Q ist, ist q Antipolare zu Q_1 .

Fig. 199.



Hat Q die Koordinaten x_0, y_0 , so ist die Gleichung der Polaren q (vgl. Meth. Lehrbuch, II), vorausgesetzt, daß M Nullpunkt des Koordinatensystems ist,

$$xx_0 + yy_0 = r^2.$$

[Ist letzteres nicht der Fall, sondern hat M die Koordinaten p und q , so ist die Gleichung von q

$$(x - p)(x_0 - p) + (y - q)(y_0 - q) = r^2.]$$

Ist M Nullpunkt, so sind die Koordinaten des Antipols $x_1 = -x_0$ und $y_1 = -y_0$. Die Gleichung von q lautet in diesen Koordinaten

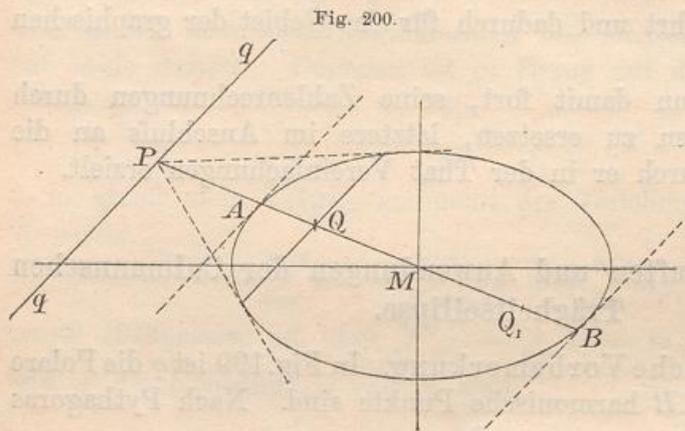
$$xx_1 + yy_1 = -r^2$$

oder

$$xx_1 + yy_1 + r^2 = 0.$$

272) Denkt man sich die Fig. 199 durch Parallelprojektion auf eine beliebige Ebene übertragen, so daß sich der Kreis in eine Ellipse verwandelt, so bleiben die harmonischen Beziehungen bestehen, ebenso die reciproke Beziehung, die Gerade q aber wird parallel zu den

Tangenten in den Endpunkten A und B des Durchmessers, so daß es sich um konjugierte Richtungen handelt.



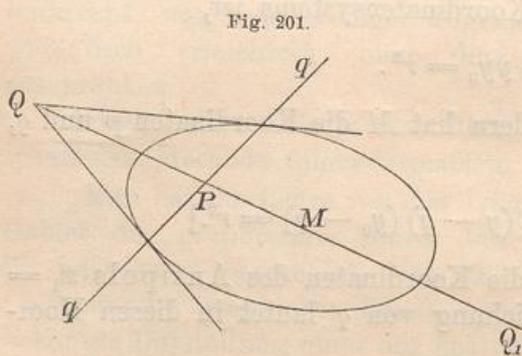
Demnach sind in Fig. 200 $PQAB$ harmonische Punkte, die Parallele q zu den Tangenten in A und B ist die Polare von Q und zugleich die Antipolare von Q_1 . Es ist $MQ \cdot MP = MA^2$, $MQ_1 \cdot MP = -MA^2$. Sind ferner x_0 und y_0 die Koordinaten von Q , so ist die Gleichung von q

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

wo a und b die Hauptachsen der Ellipse bedeuten. Sind dagegen x_1 und y_1 die Koordinaten von Q_1 , so hat die Antipolare q die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + 1 = 0.$$

273) Aufgabe. Den Antipol einer Geraden q zu bestimmen, welche die Ellipse nicht schneidet.



Auflösung. Man ziehe (Fig. 200) eine beliebige Sehne parallel zu q und verbinde ihren Halbierungspunkt mit M . Dies gibt den konjugierten Durchmesser MP . Von P aus lege man Tangenten an die Ellipse. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte gibt den Schnittpunkt Q . Man mache $MQ_1 = MQ$, dann ist Q_1 der Antipol.

Schneidet die Gerade die Ellipse, so ist die Konstruktion noch etwas einfacher. (Fig. 201.) Es gibt noch zahlreiche andere Lösungen.

274) **Satz.** Die Koordinaten des Antipols der Ordinatenachse in Bezug auf die Centralellipse einer Fläche F bestimmen sich mittels der Gleichungen

$$x_1 = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}},$$

$$y_1 = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Beweis. In Fig. 202 sei S der Schwerpunkt der Fläche F , seine Koordinaten seien q und p ; P sei der nach obiger Methode konstruierte Antipol der Ordinatenachse OY in Bezug auf die Centralellipse. Die Hauptachsen der letzteren bilden ein zweites Koordinatensystem $\xi\eta$. In diesem System habe P die Koordinaten ξ_1 und η_1 , im anderen x_1 und y_1 . Die Gleichung der Antipolare OY ist dann in ersterem System nach Obigem

$$\frac{\xi \xi_1}{a^2} + \frac{\eta \eta_1}{b^2} + 1 = 0.$$

Setzt man $\xi = 0$ und dann $\eta = 0$, so findet man die Abschnitte

$$SA = -\frac{a^2}{\xi_1}, \quad SB = -\frac{b^2}{\eta_1}.$$

Hat α die aus Fig. 202 ersichtliche Bedeutung, so ist mit Hülfe der Schwerpunktskoordinaten

$$SA = -\frac{p}{\sin \alpha}, \quad SB = -\frac{p}{\cos \alpha}.$$

Setzt man dies in die vorigen Gleichungen ein, so folgen die Koordinaten des Antipols P als

$$\xi_1 = \frac{a^2}{p} \sin \alpha, \quad \eta_1 = \frac{b^2}{p} \cos \alpha.$$

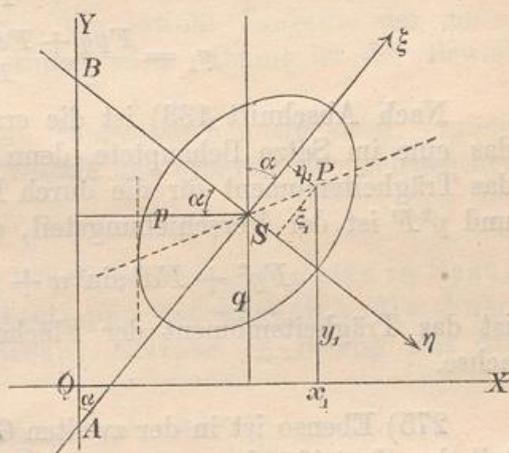
Zwischen den Koordinaten x_1, y_1, ξ_1 und η_1 bestehen aber folgende Beziehungen:

$$x_1 = p + \xi_1 \sin \alpha + \eta_1 \cos \alpha,$$

$$y_1 = q + \xi_1 \cos \alpha - \eta_1 \sin \alpha.$$

Einsetzung der Werte von ξ_1 und η_1 giebt

Fig. 202.



$$x_1 = p + \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{p} + \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{p},$$

$$y_1 = q + \frac{a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{p} - \frac{b^2 \sin \alpha \cos \alpha}{p},$$

oder, wenn man gleichnamig macht und $a^2 - b^2 = e^2$ setzt,

$$x_1 = \frac{p^2 + a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{p},$$

$$y_1 = \frac{pq + e^2 \sin \alpha \cos \alpha}{p}.$$

Multipliziert man oben und unten mit F , so wird

$$x_1 = \frac{Fp^2 + Fa^2 \sin^2 \alpha + Fb^2 \cos^2 \alpha}{Fp},$$

$$y_1 = \frac{Fpq + Fe^2 \sin \alpha \cos \alpha}{Fp}.$$

Nach Abschnitt 133) ist die erste Gleichung nichts anderes, als das eine im Satze Behauptete, denn $Fa^2 \sin^2 \alpha + Fb^2 \cos^2 \alpha$ bedeutet das Trägheitsmoment für die durch Drehung um α gewonnene Achse, und $p^2 F$ ist der Verschiebungsteil, d. h.

$$Fp^2 + Fa^2 \sin^2 \alpha + Fb^2 \cos^2 \alpha = F\rho^2$$

ist das Trägheitsmoment der Fläche F in Bezug auf die Ordinatenachse.

275) Ebenso ist in der zweiten Gleichung Fpq der Verschiebungsteil des Centrifugalmomentes, während nach Nr. 140

$$Fe^2 \sin \alpha \cos \alpha = F \frac{e^2}{2} \sin 2\alpha = F\lambda^2$$

das durch Drehung gewonnene Centrifugalmoment ist.

Die Nenner in beiden Gleichungen bedeuten das statische Moment M_y . Es ist also in der That

$$x_1 = \frac{T_y}{M_y}, \quad y_1 = \frac{M_{xy}}{M_y}.$$

Demnach stimmt der Antipol überein mit dem Angriffspunkte der Centrifugalkraft der um die Ordinatenachse gedrehten Fläche F , ebenso mit dem Angriffspunkte des seitlichen Wasserdrucks gegen diese Fläche, vorausgesetzt, daß die Ordinatenachse Wasserstandslinie ist, mit der Schwerpunktsprojektion des mittels einer durch OY gehenden Ebene abgeschrägten Cylinders, und das Entsprechende gilt von allen andern physikalischen, mechanischen und stereometrischen Problemen, die früher besprochen worden sind.

Graphisch lassen sich also die entsprechenden Punkte mit Hilfe der Culmannschen Centralellipse sehr leicht bestimmen.

276) Auch für den Zusammenhang zwischen der Culmannschen Centralellipse und den übrigen Culmannschen Trägheitsellipsen ist der Antipol von grundlegender Bedeutung, wie sich aus den folgenden Betrachtungen ergibt.

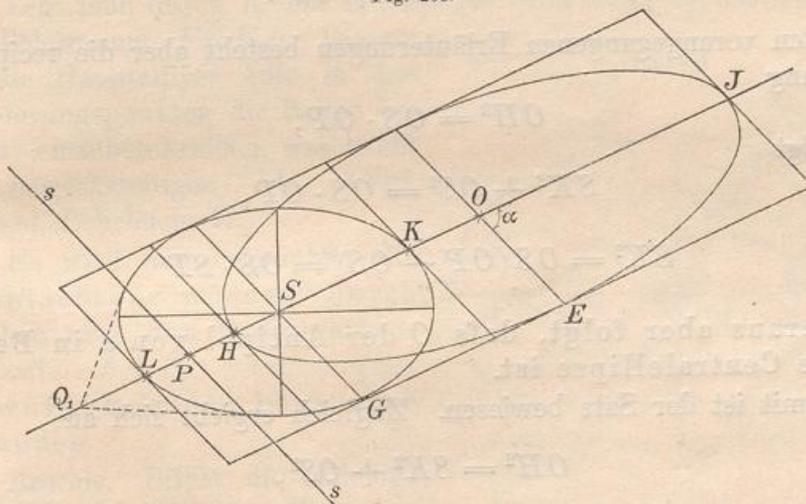
Satz. Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Culmannschen Trägheitsellipsen sind parallel zu ihrer Centrale.

Beweis. Sind P_1 und P_2 die Mittelpunkte, und ist $F\varrho^2$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse P_1P_2 , so hat man auf der letzteren in P_1 bzw. P_2 ein Lot ϱ zu errichten und durch seinen Endpunkt eine Parallele zu legen, die sowohl Tangente der einen, als auch der andern Trägheitsellipse wird. Damit ist der Beweis geliefert.

Dafs es sich nur um äufsere Tangenten handeln kann, ergibt sich aus dem Parallelismus zur Centrale und erhärtet sich gelegentlich des folgenden Satzes.

277) **Satz.** Die Polare des Flächenschwerpunktes in Bezug auf eine beliebige Trägheitsellipse ist zugleich die Antipolare des Mittelpunktes dieser Ellipse in Bezug auf die Centralellipse.

Fig. 203.



Beweis: In Fig. 203 ist die um S gelegte Centralellipse und die um einen beliebigen Punkt O gelegte Trägheitsellipse dargestellt. Die gemeinschaftlichen Tangenten sind nach Nr. 276 parallel zu OS .

Die in den Schnittpunkten L, H, K, J dieser Geraden mit den Ellipsen an die letzteren gelegten Tangenten sind sämtlich parallel (konjugierte Richtung zum Durchmesser OS). Die Gerade s , die Polare des Punktes S in Bezug auf die Ellipse O , ist parallel zu den Tangenten, ebenso die zu OS konjugierten Halbmesser OE und SG . Der von diesen konjugierten Richtungen eingeschlossene spitze Winkel sei α , der senkrechte Abstand der gemeinschaftlichen Tangenten vom Durchmesser OS also $OE \cdot \sin \alpha$, während $OH \cdot \sin \alpha$ der Abstand der in H und J berührenden Tangenten von O ist.

Das Trägheitsmoment der Fläche F für die Achse OE ist, wie sich aus der Erklärung der Culmannschen Ellipse ergibt,

$$FQ^2 = F(OH \cdot \sin \alpha)^2 = T_1,$$

das in Bezug auf die Achse SG genommen ist ebenso

$$T = F(SK \cdot \sin \alpha)^2.$$

Nach dem Verschiebungssatze ist ferner

$$T_1 = T + e^2 F,$$

also hier

$$F \cdot (OH \cdot \sin \alpha)^2 = F \cdot (SK \cdot \sin \alpha)^2 + F(OS \cdot \sin \alpha)^2,$$

denn $OS \cdot \sin \alpha$ ist die Verschiebungslänge von SG nach OE . Daraus folgt

$$OH^2 = SK^2 + OS^2.$$

Nach den vorangegangenen Erläuterungen besteht aber die reciproke Beziehung

$$OH^2 = OS \cdot OP,$$

also folgt

$$SK^2 + OS^2 = OS \cdot OP,$$

so dafs

$$SK^2 = OS(OP - OS) = OS \cdot SP$$

ist.

Daraus aber folgt, dafs O der Antipol von s in Bezug auf die Centralellipse ist.

Damit ist der Satz bewiesen. Zugleich ergibt sich aus

$$OH^2 = SK^2 + OS^2,$$

dafs $OH > OS$ ist. Der Schwerpunkt S wird also von jeder Culmannschen Trägheitsellipse umschlossen.

Bemerkung. Kennt man mehrere Trägheitsellipsen und den Schwerpunkt, so kann man auch mehrere (doppelt so viel) Tangenten

der Centralellipse zeichnen. Es muß demnach eine ganze Reihe von Konstruktionsaufgaben bestehen, z. B.:

278) **Aufgabe.** Die Trägheitsellipse einer Fläche F für einen beliebigen Punkt O sei gegeben, ebenso der Schwerpunkt S der Fläche; die Centralellipse mit ihren Hauptachsen soll konstruiert werden.

Auflösung. Die in Figur 204 um O gelegte Ellipse sei die gegebene, S , welches nach Obigem innerhalb liegen muß, sei der gegebene Schwerpunkt. Man ziehe OS und die beiden parallelen Tangenten, konstruiere zu S die Polare s und bestimme $SK = SL$ mittels der Gleichung (vgl. Nr. 277)

$$SK^2 = SO \cdot PS.$$

Legt man durch K und L Parallele zur Polare, so erhält man ein Parallelogramm $FGHJ$. Diesem ist die Hauptellipse (die in den Halbierungspunkten die Seiten berührt) einzubeschreiben, was leicht zu bewerkstelligen ist. (Vgl. Method. Lehrbuch, II.)

Es wird nun behauptet, die Hauptachsen würden durch Halbierung des Brennstrahlwinkels F_1SF_2 und seines Nebenwinkels der Lage nach gefunden.

Beweis. Bildet die beliebige Achse OZ mit OF_2 den Winkel α , so ist nach Nr. 133 der Radius des Trägheitsmomentes in Bezug auf diese Achse zu bestimmen aus

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha.$$

Fig. 204.

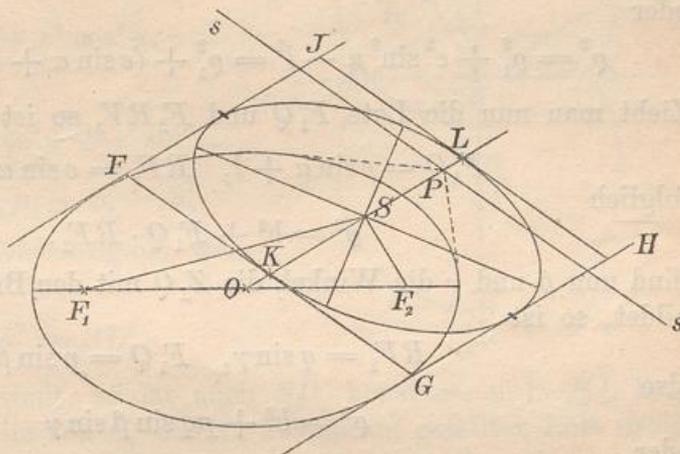
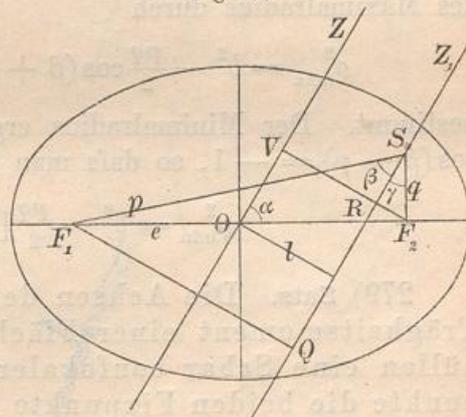


Fig. 205.



Für eine Parallele durch S , die von O um l entfernt sein mag, ist demnach

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha - l^2,$$

oder, da $\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = e^2$ ist,

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 \sin^2 \alpha + e^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha - l^2$$

oder

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + e^2 \sin^2 \alpha - l^2 = \varrho_1^2 + (e \sin \alpha + l)(e \sin \alpha - l).$$

Zieht man nun die Lote $F_1 Q$ und $F_2 R V$, so ist

$$F_1 Q = e \sin \alpha + l, \quad R F_2 = e \sin \alpha - l,$$

folglich

$$\varrho^2 = b^2 + F_1 Q \cdot R F_2.$$

Sind nun β und γ die Winkel, die $Z_1 Q$ mit den Brennstrahlen p und q bildet, so ist

$$R F_2 = q \sin \gamma, \quad F_1 Q = p \sin \beta,$$

also

$$\varrho^2 = b^2 + pq \sin \beta \sin \gamma$$

oder

$$\varrho^2 = b^2 + \frac{1}{2} pq [\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)].$$

Hier ist rechts alles konstant, mit Ausnahme der Differenz $(\beta - \gamma)$. Ein Maximum tritt also ein, wenn $\beta - \gamma = 0$, folglich ist die Winkelhalbierende die Achse des Maximalmomentes, das Lot dazu die des Minimalmomentes.

Damit ist die Behauptung bewiesen. Zugleich ist die Gröfse des Maximalradius durch

$$\varrho_{\max}^2 = b^2 - \frac{pq}{2} \cos(\beta + \gamma) = b^2 - \frac{pq}{2} \cos(F_1 S F_2)$$

bestimmt. Der Minimalradius ergibt sich für $\beta - \gamma = 180^\circ$, also $\cos(\beta - \gamma) = -1$, so daß man erhält

$$\varrho_{\min}^2 = b^2 - \frac{pq}{2} [1 + \cos(F_1 S F_2)].$$

279) **Satz.** Die Achsen der Ebene, in Bezug auf die das Trägheitsmoment einer Fläche konstanten Wert hat, umhüllen eine Schar confokaler Kegelschnitte, deren Brennpunkte die beiden Fixpunkte sind.

Beweis. Nach Nr. 145 war in Bezug auf eine Achse, die von den Fixpunkten die Entfernung p_1 und p_2 hatte, der Trägheitsradius ϱ zu bestimmen aus der Gleichung

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + p_1 p_2.$$

Aus Figur 206 folgt ferner

$$SD_1^2 = p^2 + DD_1^2 = p^2 + e^2 \sin^2 \alpha.$$

Außerdem war schon in Nr. 145 gezeigt, daß, wenn $SC_1 = e$ gesetzt wird,

$$p_1 p_2 = p^2 - e^2 \cos^2 \alpha,$$

also

$$p^2 = p_1 p_2 + e^2 \cos^2 \alpha.$$

Demnach ist

$$SD_1^2 = p_1 p_2 + e^2 \cos^2 \alpha + e^2 \sin^2 \alpha$$

$$= p_1 p_2 + e^2 = p_1 p_2 + \varrho_1^2 - \varrho_2^2,$$

folglich unter Berücksichtigung der ersten Gleichung

$$SD_1^2 = \varrho^2 - \varrho_2^2 = SD_2^2.$$

Ist nun ϱ konstant, so ist auch SD_1 konstant, d. h. KL liegt dann stets so, daß die von C_1 und C_2 aus darauf gefällten Lote in die

Peripherie des mit $SD_1 = \sqrt{\varrho^2 - \varrho_2^2}$

um S geschlagenen Kreises fallen.

Dies ist aber eine bekannte Brennpunkteigenschaft der Ellipse

und der Hyperbel. Ist $SD_1 > e$,

so schneidet KL die Gerade $C_1 C_2$ außerhalb der Strecke $C_1 C_2$,

und es handelt sich um eine Ellipse. Dabei ist $\varrho^2 - \varrho_2^2 > e^2$,

d. h. $\varrho^2 - \varrho_2^2 > \varrho_1^2 - \varrho_2^2$, demnach

handelt es sich um den Fall $\varrho > \varrho_1$.

Ist dagegen $SD_1 < e$, so schneidet

die Gerade KL zwischen C_1 und C_2 ,

was auf den Fall der Hyperbel führt. Dabei ist $\varrho < \varrho_1$.

Ist endlich $SD_1 = e$, so ist

$\varrho = a$, d. h. die Strahlen geben

zwei Büschel durch C_1 und C_2 , welches gewissermaßen die un-

endlich flache Ellipse $C_1 C_2$ bezw. die unendlich flache Hyperbel (die von C_1 nach $+\infty$, von C_2 nach $-\infty$ geht) umhüllt.

Fig. 207 stellt die betreffende Doppelschar confokaler Kegel-

Fig. 206.

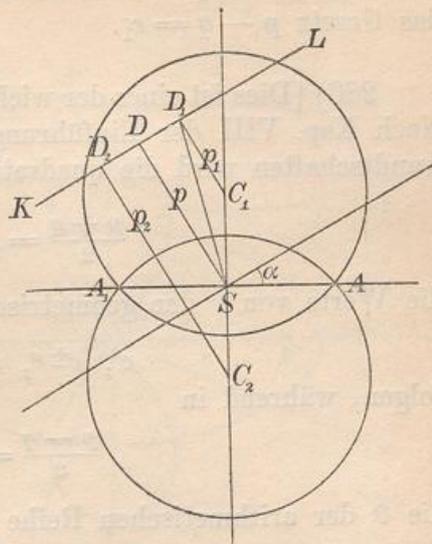
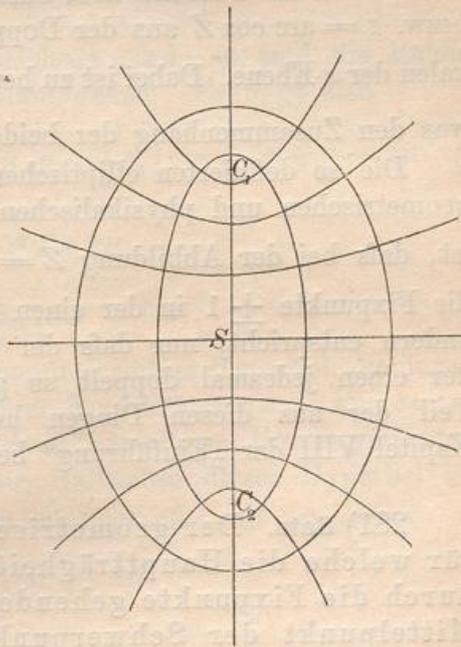


Fig. 207.



schnitte dar. Die eine Schar hat das Gesetz $p + q = c$, die andere das Gesetz $p - q = c_1$.

280) [Dies ist eines der wichtigsten isothermischen Kurvensysteme. Nach Kap. VIII der Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften wird die quadratische Einteilung erreicht, wenn in

$$\frac{p + q}{2} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) = c$$

die Werte von r der geometrischen Reihe

$$e^0, e^{\pm \alpha}, e^{\pm 2\alpha}, e^{\pm 3\alpha}, \dots$$

folgen, während in

$$\frac{p - q}{2} = \cos \vartheta = c_1$$

die ϑ der arithmetischen Reihe

$$0, \pm \alpha, \pm 2\alpha, \pm 3\alpha, \dots$$

folgen. Das System entsteht mit Hilfe der Abbildung $Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ bzw. $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$ aus dem System der concentrischen Kreise und Radien der z -Ebene, aber auch mit Hilfe der Abbildung $Z = \cos z$ bzw. $z = \arccos Z$ aus der Doppelschar der Horizontalen und Vertikalen der z -Ebene. Dabei ist zu beachten, daß $\cos z = \frac{1}{2} \left(e^{zi} + \frac{1}{e^{zi}} \right)$ ist, was den Zusammenhang der beiden Abbildungsarten aufklärt.

Die so definierten elliptischen Koordinaten geben zu zahlreichen geometrischen und physikalischen Betrachtungen Anlaß. Interessant ist, daß bei der Abbildung $Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ dem Kreisbüschel durch die Fixpunkte ± 1 in der einen Ebene wiederum ein solches in der andern entspricht, nur daß der Schnittwinkel zweier Individuen in der einen jedesmal doppelt so groß ist, wie in der andern. Ein Teil der aus diesen Dingen hervorgehenden Folgerungen ist in Kapitel VIII der „Einführung“ behandelt.]

281) **Satz.** Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für welche die Hauptträgheitsachsen parallel sind, ist eine durch die Fixpunkte gehende gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt ist und deren Asymptoten den beiden gegebenen Richtungen parallel sind.

Beweis. Die Figur stelle die um S gelegte Centralellipse dar. Die Achsen ξ und η sollen die gegebene konstante Richtung der zu untersuchenden Hauptachsen darstellen. Die Winkelhalbierenden X

und Y geben also die Richtungen der Gleichheitsachsen an, die ebenfalls für alle zu untersuchenden Punkte konstant sind. Diese letzteren mögen mit der Hauptachse der Centralellipse den Winkel α einschließen.

Ist nun P ein Punkt des zu untersuchenden Ortes, so ist nach dem Verschiebungssatze und dem Drehungssatze in Bezug auf die beiden Koordinaten x und y für das Trägheitsmoment (vgl. Nr. 133)

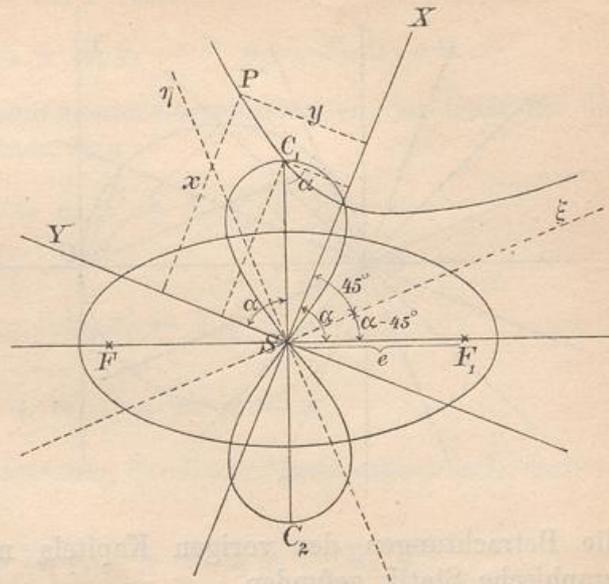


Fig. 208.

$$\varrho_x^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha + y^2,$$

$$\varrho_y^2 = \varrho_2^2 \cos^2 \alpha + \varrho_1^2 \sin^2 \alpha + x^2.$$

Da aber X und Y die Gleichheitsachsen sind, so sind die linken Seiten, folglich auch die rechten Seiten gleich. Es folgt also

$$y^2 - x^2 = \cos^2 \alpha (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) - \sin^2 \alpha (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) = e^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

oder

$$y^2 - x^2 = e^2 \cos 2\alpha,$$

oder auch

$$x^2 - y^2 = e^2 \cos (180^\circ - 2\alpha).$$

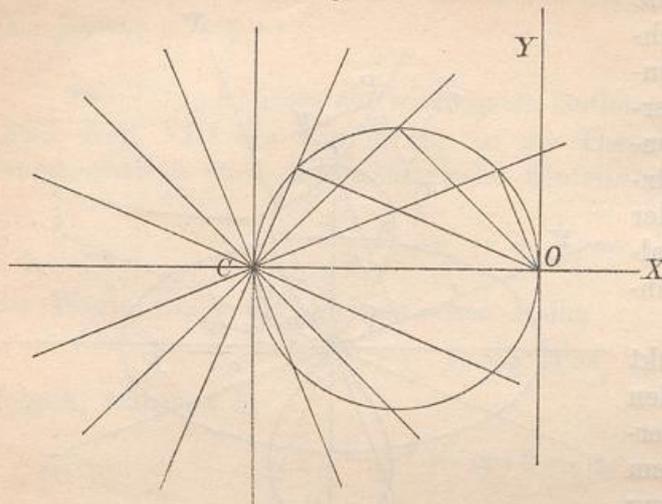
Demnach ist der geometrische Ort eine gleichseitige Hyperbel, die durch die Fixpunkte C_1 und C_2 geht, weil deren Koordinaten $e \cos \alpha$ und $e \sin \alpha$ der Gleichung $y^2 - x^2 = e^2 \cos^2 \alpha - e^2 \sin^2 \alpha$ genügen. Ihre Asymptoten aber haben die Richtung ξ, η . Die Halbachse dieser Hyperbel ist gleich $e \sqrt{\cos (180^\circ - 2\alpha)}$, der Scheitel liegt also auf der durch

$$r^2 = e^2 \cos (180^\circ - 2\alpha)$$

bestimmten Lemniskate.

282) Das durch die Fixpunkte gehende Büschel gleichseitiger Hyperbeln giebt die geometrischen Orte für alle möglichen konstanten Richtungen von Hauptachsen an. Die Figur ist nichts anderes, als

Fig. 209.



die Abbildung der nebenstehenden mit Hilfe der Funktion $Z = \sqrt{z}$, wobei C nach den Fixpunkten C_1 und C_2 transformiert wird. Das Strahlenbündel durch C giebt das Hyperbelbündel durch C_1 und C_2 , der Fußpunktkreis durch O und C giebt die Lemniskate durch O , C_1 und C_2 .

So haben denn die Betrachtungen des vorigen Kapitels neue Bedeutung für die graphische Statik gefunden.

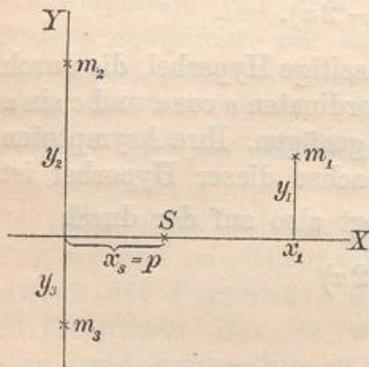
F. Ersatz der homogenen ebenen Fläche F durch drei Massenpunkte nach Reye.

283) Soll eine Fläche F in mechanischer Hinsicht durch drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 ersetzt werden, z. B. bezüglich der Drehung um irgend einen Punkt oder eine Gerade der Ebene, so muß zunächst sein

$$1) \quad m_1 + m_2 + m_3 = F.$$

Werden hierbei m_1 und m_2 willkürlich gewählt, so ist die dritte Masse durch $m_3 = F - (m_1 + m_2)$ bestimmt.

Fig. 210.



Damit z. B. auch die Centrifugalkräfte übereinstimmen, müssen die statischen Momente der Fläche und des Punktsystems in Bezug auf willkürliche Koordinatenachsen identisch sein, so daß auch die Schwerpunkte zusammenfallen. Um die Gleichungen möglichst einfach zu machen, kann man die Gerade $m_2 m_3$ zur Y -Achse machen, das vom Schwerpunkte S auf diese Gerade gefällte Lot zur X -Achse. Dann muß in Bezug auf die Y -Achse sein

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = F x_s,$$

oder, da $x_2 = x_3 = 0$,

$$2) \quad m_1 x_1 = F x_s = F p.$$