# Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Geometrische Vorbemerkung.

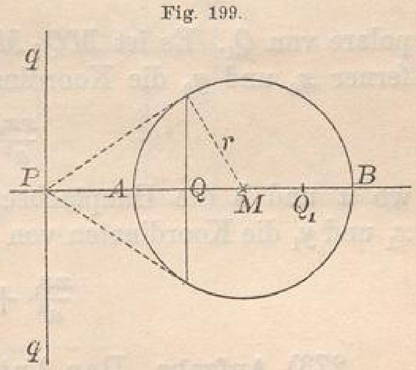
Jahrgang 1877, S. 51—62, ferner die Abhandlung von Lodge, Philosoph. magazine 1886, S. 453—458) der Trägheitsmomente durch Kreise, welche für die praktischen Anwendungen unzweifelhaft bequemer sind, als die Ellipsen. Erst durch die hier entwickelte Darstellung wird die Lehre von den Trägheitsmomenten auf diejenige von den statischen Momenten zurückgeführt und dadurch für das Gebiet der graphischen Statik gewonnen."

Mohr fährt dann damit fort, seine Zahlenrechnungen durch graphische Operationen zu ersetzen, letztere im Anschlufs an die Streckentheorie, wodurch er in der That Vereinfachungen erzielt.

## E. Einige Eigenschaften und Anwendungen der Culmannschen Trägheitsellipse.

271) Geometrische Vorbemerkung. In Fig. 199 ist $q$ die Polare von $Q$, so dafs $PQAB$ harmonische Punkte sind. Nach Pythagoras ist $r^2 = MQ \cdot MP$, also $MQ = \frac{r^2}{MP}$, eine Beziehung, die für $r = 1$ in die reciproke $MQ = \frac{1}{MP}$ übergeht. Macht man $MQ_1 = - MQ = - \frac{r^2}{MP}$, so hat man die entsprechende „negative Abbildung", und wie $Q$ der Pol zu $q$ heifst, so heifst $Q_1$ der Antipol zu $q$. Ebenso wie $q$ Polare zu $Q$ ist, ist $q$ Antipolare zu $Q_1$.

Fig. 199.




Hat $Q$ die Koordinaten $x_0$, $y_0$, so ist die Gleichung der Polaren $q$ (vgl. Meth. Lehrbuch, II), vorausgesetzt, dafs $M$ Nullpunkt des Koordinatensystems ist,

$$x x_0 + y y_0 = r^2 .$$

[Ist letzteres nicht der Fall, sondern hat $M$ die Koordinaten $p$ und $q$, so ist die Gleichung von $q$

$$(x - p)(x_0 - p) + (y - q)(y_0 - q) = r^2.]$$

Ist $M$ Nullpunkt, so sind die Koordinaten des Antipols $x_1 = - x_0$ und $y_1 = - y_0$. Die Gleichung von $q$ lautet in diesen Koordinaten

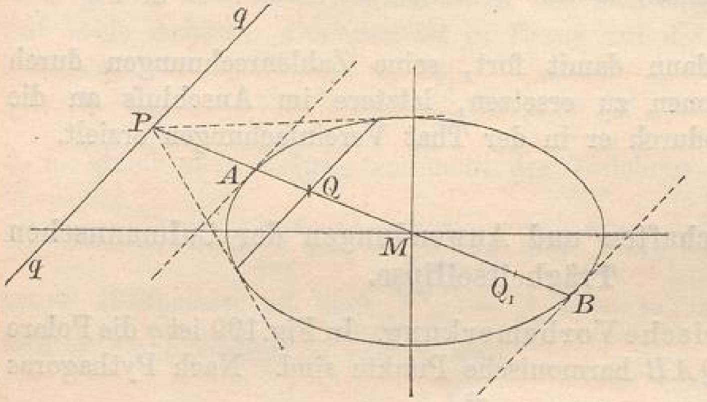
$$x x_1 + y y_1 = - r^2$$

oder

$$x x_1 + y y_1 + r^2 = 0 .$$

272) Denkt man sich die Fig. 199 durch Parallelprojektion auf eine beliebige Ebene übertragen, so dafs sich der Kreis in eine Ellipse verwandelt, so bleiben die harmonischen Beziehungen bestehen, ebenso die reciproke Beziehung, die Gerade $q$ aber wird parallel zu den Tangenten in den Endpunkten $A$ und $B$ des Durchmessers, so dafs es sich um konjugierte Richtungen handelt.

Fig. 200.




Demnach sind in Fig. 200 $PQAB$ harmonische Punkte, die Parallele $q$ zu den Tangenten in $A$ und $B$ ist die Polare von $Q$ und zugleich die Antipolare von $Q_1$. Es ist $MQ \cdot MP = MA^2$, $MQ_1 \cdot MP = -MA^2$. Sind ferner $x_0$ und $y_0$ die Koordinaten von $Q$, so ist die Gleichung von $q$

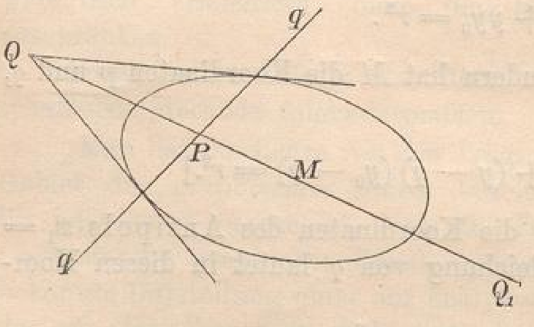
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

wo $a$ und $b$ die Hauptachsen der Ellipse bedeuten. Sind dagegen $x_1$ und $y_1$ die Koordinaten von $Q_1$, so hat die Antipolare $q$ die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + 1 = 0.$$

273) **Aufgabe.** Den Antipol einer Geraden $q$ zu bestimmen, welche die Ellipse nicht schneidet.

Fig. 201.




**Auflösung.** Man ziehe (Fig. 200) eine beliebige Sehne parallel zu $q$ und verbinde ihren Halbierungspunkt mit $M$. Dies giebt den konjugierten Durchmesser $MP$. Von $P$ aus lege man Tangenten an die Ellipse. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte giebt den Schnittpunkt $Q$. Man mache $MQ_1 = MQ$, dann ist $Q_1$ der Antipol.

Schneidet die Gerade die Ellipse, so ist die Konstruktion noch etwas einfacher. (Fig. 201.)

Es giebt noch zahlreiche andere Lösungen.