Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

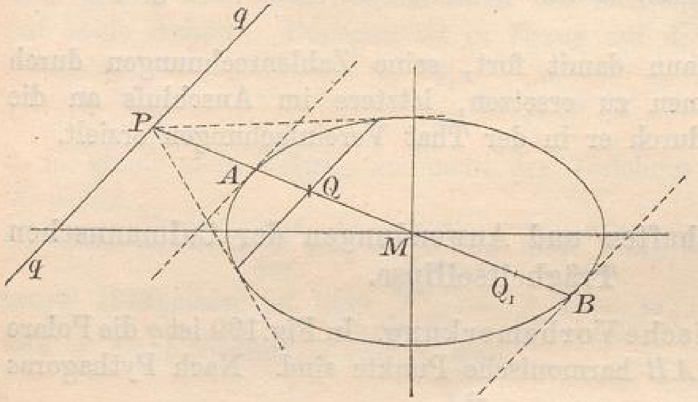
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Antipol der Geraden und Antipolare des Punktes in Bezug auf eine Ellipse.

272) Denkt man sich die Fig. 199 durch Parallelprojektion auf eine beliebige Ebene übertragen, so daſs sich der Kreis in eine Ellipse verwandelt, so bleiben die harmonischen Beziehungen bestehen, ebenso die reciproke Beziehung, die Gerade q aber wird parallel zu den Tangenten in den Endpunkten A und B des Durchmessers, so daſs es sich um konjugierte Richtungen handelt.

Fig. 200.



Demnach sind in Fig. 200 $PQAB$ harmonische Punkte, die Parallele q zu den Tangenten in A und B ist die Polare von Q und zugleich die Antipolare von Q_1. Es ist $MQ \cdot MP = MA^2$, $MQ_1 \cdot MP = -MA^2$. Sind ferner x_0 und y_0 die Koordinaten von Q, so ist die Gleichung von q

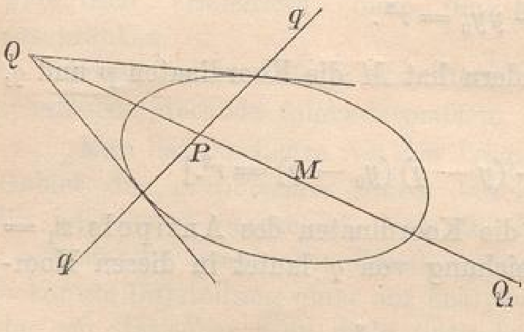
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

wo a und b die Hauptachsen der Ellipse bedeuten. Sind dagegen x_1 und y_1 die Koordinaten von Q_1, so hat die Antipolare q die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + 1 = 0.$$

273) **Aufgabe.** Den Antipol einer Geraden q zu bestimmen, welche die Ellipse nicht schneidet.

Fig. 201.



Auflösung. Man ziehe (Fig. 200) eine beliebige Sehne parallel zu q und verbinde ihren Halbierungspunkt mit M. Dies giebt den konjugierten Durchmesser MP. Von P aus lege man Tangenten an die Ellipse. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte giebt den Schnittpunkt Q. Man mache $MQ_1 = MQ$, dann ist Q_1 der Antipol.

Schneidet die Gerade die Ellipse, so ist die Konstruktion noch etwas einfacher. (Fig. 201.)

Es giebt noch zahlreiche andere Lösungen.

274) **Satz.** Die Koordinaten des Antipols der Ordinatenachse in Bezug auf die Centralellipse einer Fläche F bestimmen sich mittels der Gleichungen

$$x_1 = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}},$$

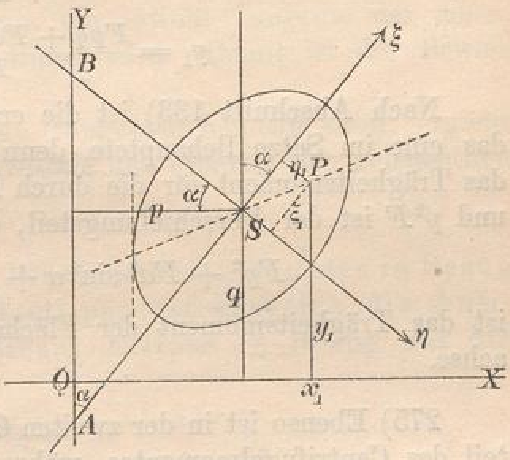
$$y_1 = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Beweis. In Fig. 202 sei S der Schwerpunkt der Fläche F, seine Koordinaten seien q und p; P sei der nach obiger Methode konstruierte Antipol der Ordinatenachse OY in Bezug auf die Centralellipse. Die Hauptachsen der letzteren bilden ein zweites Koordinatensystem $\xi\eta$. In diesem System habe P die Koordinaten ξ_1 und η_1, im anderen x_1 und y_1. Die Gleichung der Antipolare OY ist dann in ersterem System nach Obigem

$$\frac{\xi\xi_1}{a^2} + \frac{\eta\eta_1}{b^2} + 1 = 0.$$

Setzt man $\xi = 0$ und dann $\eta = 0$, so findet man die Abschnitte

Fig. 202.



$$SA = -\frac{a^2}{\xi_1}, \quad SB = -\frac{b^2}{\eta_1}.$$

Hat α die aus Fig. 202 ersichtliche Bedeutung, so ist mit Hülfe der Schwerpunktskoordinaten

$$SA = -\frac{p}{\sin\alpha}, \quad SB = -\frac{p}{\cos\alpha}.$$

Setzt man dies in die vorigen Gleichungen ein, so folgen die Koordinaten des Antipols P als

$$\xi_1 = \frac{a^2}{p}\sin\alpha, \quad \eta_1 = \frac{b^2}{p}\cos\alpha.$$

Zwischen den Koordinaten x_1, y_1, ξ_1 und η_1 bestehen aber folgende Beziehungen:

$$x_1 = p + \xi_1 \sin\alpha + \eta_1 \cos\alpha,$$

$$y_1 = q + \xi_1 \cos\alpha - \eta_1 \sin\alpha.$$

Einsetzung der Werte von ξ_1 und η_1 giebt

$$x_1 = p + \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{p} + \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{p},$$

$$y_1 = q + \frac{a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{p} - \frac{b^2 \sin \alpha \cos \alpha}{p},$$

oder, wenn man gleichnamig macht und $a^2 - b^2 = e^2$ setzt,

$$x_1 = \frac{p^2 + a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{p},$$

$$y_1 = \frac{pq + e^2 \sin \alpha \cos \alpha}{p}.$$

Multipliziert man oben und unten mit F, so wird

$$x_1 = \frac{Fp^2 + Fa^2 \sin^2 \alpha + Fb^2 \cos \alpha}{Fp},$$

$$y_1 = \frac{Fpq + Fe^2 \sin \alpha \cos \alpha}{Fp}.$$

Nach Abschnitt 133) ist die erste Gleichung nichts anderes, als das eine im Satze Behauptete, denn $Fa^2 \sin^2 \alpha + Fb^2 \cos^2 \alpha$ bedeutet das Trägheitsmoment für die durch Drehung um α gewonnene Achse, und $p^2 F$ ist der Verschiebungsteil, d. h.

$$Fp^2 + Fa^2 \sin^2 \alpha + Fb^2 \cos^2 \alpha = F\varrho^2$$

ist das Trägheitsmoment der Fläche F in Bezug auf die Ordinatenachse.

275) Ebenso ist in der zweiten Gleichung Fpq der Verschiebungsteil des Centrifugalmomentes, während nach Nr. 140

$$Fe^2 \sin \alpha \cos \alpha = F\frac{e^2}{2} \sin 2\alpha = F\lambda^2$$

das durch Drehung gewonnene Centrifugalmoment ist.

Die Nenner in beiden Gleichungen bedeuten das statische Moment M_y. Es ist also in der That

$$x_1 = \frac{T_y}{M_y}, \quad y_1 = \frac{M_{xy}}{M_y}.$$

Demnach stimmt der Antipol überein mit dem Angriffspunkte der Centrifugalkraft der um die Ordinatenachse gedrehten Fläche F, ebenso mit dem Angriffspunkte des seitlichen Wasserdrucks gegen diese Fläche, vorausgesetzt, dafs die Ordinatenachse Wasserstandslinie ist, mit der Schwerpunktsprojektion des mittels einer durch OY gehenden Ebene abgeschrägten Cylinders, und das Entsprechende gilt von allen andern physikalischen, mechanischen und stereometrischen Problemen, die früher besprochen worden sind.

Graphisch lassen sich also die entsprechenden Punkte mit Hülfe der Culmannschen Centralellipse sehr leicht bestimmen.

276) Auch für den Zusammenhang zwischen der Culmannschen Centralellipse und den übrigen Culmannschen Trägheitsellipsen ist der Antipol von grundlegender Bedeutung, wie sich aus den folgenden Betrachtungen ergiebt.

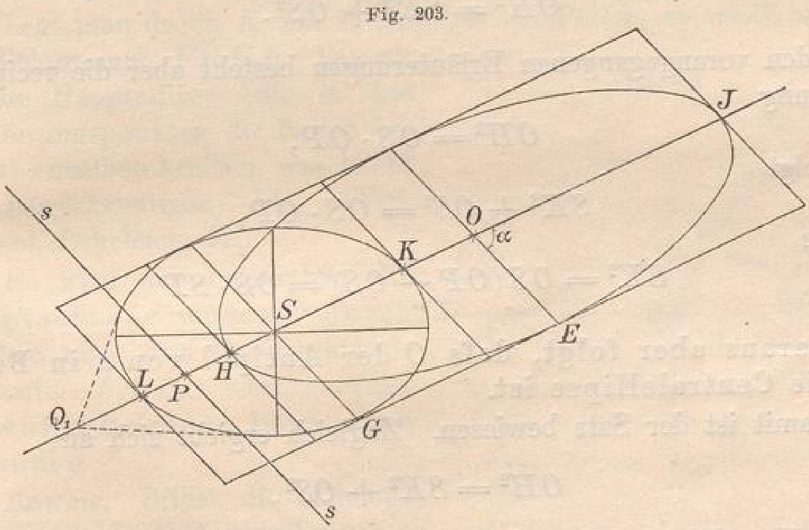
Satz. Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Culmannschen Trägheitsellipsen sind parallel zu ihrer Centrale.

Beweis. Sind P_1 und P_2 die Mittelpunkte, und ist $F\varrho^2$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse P_1P_2, so hat man auf der letzteren in P_1 bezw. P_2 ein Lot ϱ zu errichten und durch seinen Endpunkt eine Parallele zu legen, die sowohl Tangente der einen, als auch der andern Trägheitsellipse wird. Damit ist der Beweis geliefert.

Dafs es sich nur um äufsere Tangenten handeln kann, ergiebt sich aus dem Parallelismus zur Centrale und erhärtet sich gelegentlich des folgenden Satzes.

277) **Satz.** Die Polare des Flächenschwerpunktes in Bezug auf eine beliebige Trägheitsellipse ist zugleich die Antipolare des Mittelpunktes dieser Ellipse in Bezug auf die Centralellipse.

Fig. 203.



Beweis: In Fig. 203 ist die um S gelegte Centralellipse und die um einen beliebigen Punkt O gelegte Trägheitsellipse dargestellt. Die gemeinschaftlichen Tangenten sind nach Nr. 276 parallel zu OS.