Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Eigenschaften der Tangenten Culmannscher Trägheitsellipsen und entsprechender Konstruktionen.

Graphisch lassen sich also die entsprechenden Punkte mit Hülfe der Culmannschen Centralellipse sehr leicht bestimmen.

---

276) Auch für den Zusammenhang zwischen der Culmannschen Centralellipse und den übrigen Culmannschen Trägheitsellipsen ist der Antipol von grundlegender Bedeutung, wie sich aus den folgenden Betrachtungen ergiebt.

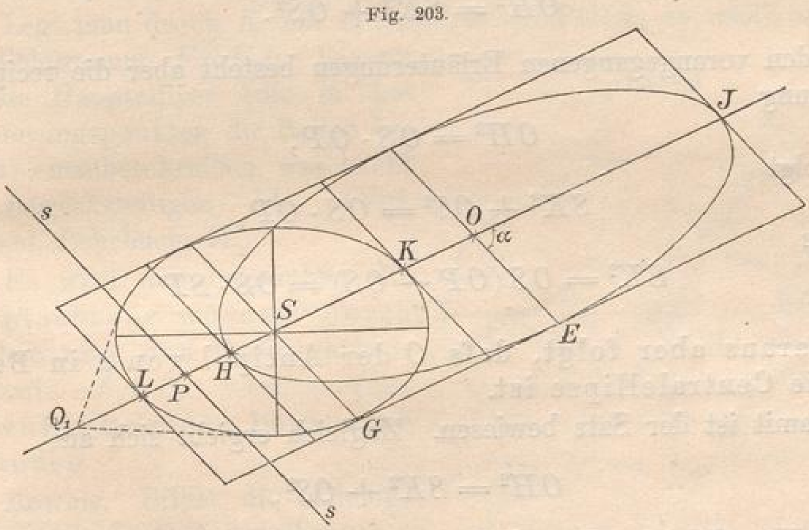
Satz. Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Culmannschen Trägheitsellipsen sind parallel zu ihrer Centrale.

Beweis. Sind P_1 und P_2 die Mittelpunkte, und ist $F\varrho^2$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse P_1P_2, so hat man auf der letzteren in P_1 bezw. P_2 ein Lot ϱ zu errichten und durch seinen Endpunkt eine Parallele zu legen, die sowohl Tangente der einen, als auch der andern Trägheitsellipse wird. Damit ist der Beweis geliefert.

Dafs es sich nur um äufsere Tangenten handeln kann, ergiebt sich aus dem Parallelismus zur Centrale und erhärtet sich gelegentlich des folgenden Satzes.

277) **Satz.** Die Polare des Flächenschwerpunktes in Bezug auf eine beliebige Trägheitsellipse ist zugleich die Antipolare des Mittelpunktes dieser Ellipse in Bezug auf die Centralellipse.

Fig. 203.



Beweis: In Fig. 203 ist die um S gelegte Centralellipse und die um einen beliebigen Punkt O gelegte Trägheitsellipse dargestellt. Die gemeinschaftlichen Tangenten sind nach Nr. 276 parallel zu OS.

Die in den Schnittpunkten L, H, K, J dieser Geraden mit den Ellipsen an die letzteren gelegten Tangenten sind sämtlich parallel (konjugierte Richtung zum Durchmesser OS). Die Gerade s, die Polare des Punktes S in Bezug auf die Ellipse O, ist parallel zu den Tangenten, ebenso die zu OS konjugierten Halbmesser OE und SG. Der von diesen konjugierten Richtungen eingeschlossene spitze Winkel sei α, der senkrechte Abstand der gemeinschaftlichen Tangenten vom Durchmesser OS also $OE \cdot \sin\alpha$, während $OH \cdot \sin\alpha$ der Abstand der in H und J berührenden Tangenten von O ist.

Das Trägheitsmoment der Fläche F für die Achse OE ist, wie sich aus der Erklärung der Culmannschen Ellipse ergiebt,

$$F\varrho^2 = F(OH \cdot \sin\alpha)^2 = T_1,$$

das in Bezug auf die Achse SG genommen ist ebenso

$$T = F(SK \cdot \sin\alpha)^2.$$

Nach dem Verschiebungssatze ist ferner

$$T_1 = T + e^2 F,$$

also hier

$$F \cdot (OH \cdot \sin\alpha)^2 = F \cdot (SK \cdot \sin\alpha)^2 + F(OS \cdot \sin\alpha)^2,$$

denn $OS \cdot \sin\alpha$ ist die Verschiebungslänge von SG nach OE. Daraus folgt

$$OH^2 = SK^2 + OS^2.$$

Nach den vorangegangenen Erläuterungen besteht aber die reciproke Beziehung

$$OH^2 = OS \cdot OP,$$

also folgt

$$SK^2 + OS^2 = OS \cdot OP,$$

so daſs

$$SK^2 = OS(OP - OS) = OS \cdot SP$$

ist.

Daraus aber folgt, daſs O der Antipol von s in Bezug auf die Centralellipse ist.

Damit ist der Satz bewiesen. Zugleich ergiebt sich aus

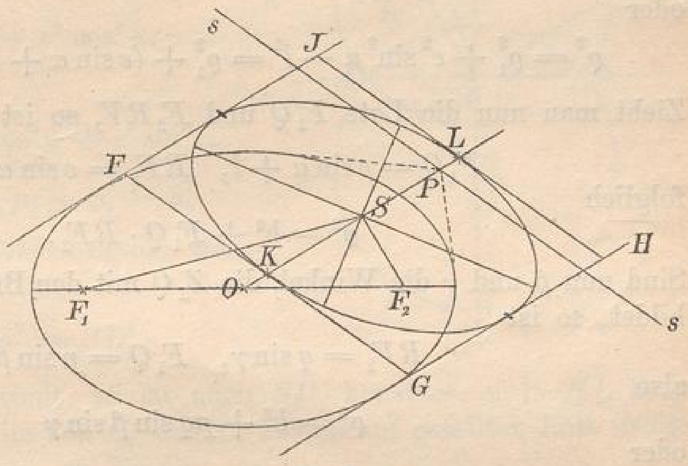
$$OH^2 = SK^2 + OS^2,$$

daſs $OH > OS$ ist. Der Schwerpunkt S wird also von jeder Culmannschen Trägheitsellipse umschlossen.

Bemerkung. Kennt man mehrere Trägheitsellipsen und den Schwerpunkt, so kann man auch mehrere (doppelt so viel) Tangenten der Centralellipse zeichnen. Es mufs demnach eine ganze Reihe von Konstruktionsaufgaben bestehen, z. B.:

278) **Aufgabe.** Die Trägheitsellipse einer Fläche F für einen beliebigen Punkt O sei gegeben, ebenso der Schwerpunkt S der Fläche; die Centralellipse mit ihren Hauptachsen soll konstruiert werden.

Fig. 204.

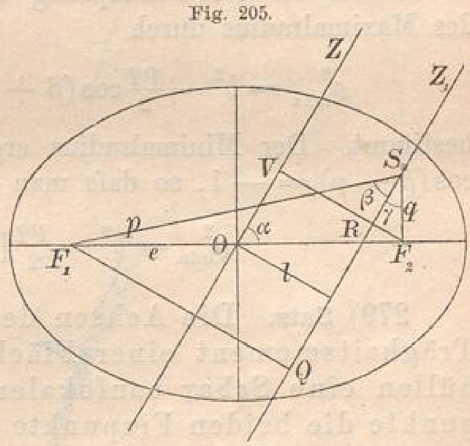


Auflösung. Die in Figur 204 um O gelegte Ellipse sei die gegebene, S, welches nach Obigem innerhalb liegen mufs, sei der gegebene Schwerpunkt. Man ziehe OS und die beiden parallelen Tangenten, konstruiere zu S die Polare s und bestimme $SK = SL$ mittels der Gleichung (vgl. Nr. 277)

$$SK^2 = SO \cdot PS.$$

Legt man durch K und L Parallele zur Polare, so erhält man ein Parallelogramm $FGHJ$. Diesem ist die Hauptellipse (die in den Halbierungspunkten die Seiten berührt) einzubeschreiben, was leicht zu bewerkstelligen ist. (Vgl. Method. Lehrbuch, II.)

Fig. 205.



Es wird nun behauptet, die Hauptachsen würden durch Halbierung des Brennstrahlwinkels F_1SF_2 und seines Nebenwinkels der Lage nach gefunden.

Beweis. Bildet die beliebige Achse OZ mit OF_2 den Winkel α, so ist nach Nr. 133 der Radius des Trägheitsmomentes in Bezug auf diese Achse zu bestimmen aus

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha.$$

Für eine Parallele durch S, die von O um l entfernt sein mag, ist demnach

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha - l^2,$$

oder, da $\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = e^2$ ist,

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 \sin^2 \alpha + e^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha - l^2$$

oder

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + e^2 \sin^2 \alpha - l^2 = \varrho_1^2 + (e \sin \alpha + l)(e \sin \alpha - l).$$

Zieht man nun die Lote $F_1 Q$ und $F_2 R V$, so ist

$$F_1 Q = e \sin \alpha + l, \quad R F_2 = e \sin \alpha - l,$$

folglich

$$\varrho^2 = b^2 + F_1 Q \cdot R F_2.$$

Sind nun β und γ die Winkel, die $Z_1 Q$ mit den Brennstrahlen p und q bildet, so ist

$$R F_2 = q \sin \gamma, \quad F_1 Q = p \sin \beta,$$

also

$$\varrho^2 = b^2 + pq \sin \beta \sin \gamma$$

oder

$$\varrho^2 = b^2 + \tfrac{1}{2} pq \left[\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)\right].$$

Hier ist rechts alles konstant, mit Ausnahme der Differenz $(\beta - \gamma)$. Ein Maximum tritt also ein, wenn $\beta - \gamma = 0$, folglich ist die Winkelhalbierende die Achse des Maximalmomentes, das Lot dazu die des Minimalmomentes.

Damit ist die Behauptung bewiesen. Zugleich ist die Gröfse des Maximalradius durch

$$\varrho_{\max}^2 = b^2 - \frac{pq}{2} \cos(\beta + \gamma) = b^2 - \frac{pq}{2} \cos(F_1 S F_2)$$

bestimmt. Der Minimalradius ergiebt sich für $\beta - \gamma = 180^0$, also $\cos(\beta - \gamma) = -1$, so dafs man erhält

$$\varrho_{\min}^2 = b^2 - \frac{pq}{2} \left[1 + \cos(F_1 S F_2)\right].$$

279) **Satz.** Die Achsen der Ebene, in Bezug auf die das Trägheitsmoment einer Fläche konstanten Wert hat, umhüllen eine Schar confokaler Kegelschnitte, deren Brennpunkte die beiden Fixpunkte sind.

Beweis. Nach Nr. 145 war in Bezug auf eine Achse, die von den Fixpunkten die Entfernung p_1 und p_2 hatte, der Trägheitsradius ϱ zu bestimmen aus der Gleichung

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + p_1 p_2.$$