



## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1897**

Auftreten konfokaler Kegelschnitte.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Für eine Parallele durch  $S$ , die von  $O$  um  $l$  entfernt sein mag, ist demnach

$$\varrho^2 = \varrho_2^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha - l^2,$$

oder, da  $\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = e^2$  ist,

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 \sin^2 \alpha + e^2 \sin^2 \alpha + \varrho_1^2 \cos^2 \alpha - l^2$$

oder

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + e^2 \sin^2 \alpha - l^2 = \varrho_1^2 + (e \sin \alpha + l)(e \sin \alpha - l).$$

Zieht man nun die Lote  $F_1 Q$  und  $F_2 R V$ , so ist

$$F_1 Q = e \sin \alpha + l, \quad R F_2 = e \sin \alpha - l,$$

folglich

$$\varrho^2 = b^2 + F_1 Q \cdot R F_2.$$

Sind nun  $\beta$  und  $\gamma$  die Winkel, die  $Z_1 Q$  mit den Brennstrahlen  $p$  und  $q$  bildet, so ist

$$R F_2 = q \sin \gamma, \quad F_1 Q = p \sin \beta,$$

also

$$\varrho^2 = b^2 + pq \sin \beta \sin \gamma$$

oder

$$\varrho^2 = b^2 + \frac{1}{2} pq [\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)].$$

Hier ist rechts alles konstant, mit Ausnahme der Differenz  $(\beta - \gamma)$ . Ein Maximum tritt also ein, wenn  $\beta - \gamma = 0$ , folglich ist die Winkelhalbierende die Achse des Maximalmomentes, das Lot dazu die des Minimalmomentes.

Damit ist die Behauptung bewiesen. Zugleich ist die Gröfse des Maximalradius durch

$$\varrho_{\max}^2 = b^2 - \frac{pq}{2} \cos(\beta + \gamma) = b^2 - \frac{pq}{2} \cos(F_1 S F_2)$$

bestimmt. Der Minimalradius ergibt sich für  $\beta - \gamma = 180^\circ$ , also  $\cos(\beta - \gamma) = -1$ , so daß man erhält

$$\varrho_{\min}^2 = b^2 - \frac{pq}{2} [1 + \cos(F_1 S F_2)].$$

279) **Satz.** Die Achsen der Ebene, in Bezug auf die das Trägheitsmoment einer Fläche konstanten Wert hat, umhüllen eine Schar confokaler Kegelschnitte, deren Brennpunkte die beiden Fixpunkte sind.

**Beweis.** Nach Nr. 145 war in Bezug auf eine Achse, die von den Fixpunkten die Entfernung  $p_1$  und  $p_2$  hatte, der Trägheitsradius  $\varrho$  zu bestimmen aus der Gleichung

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 + p_1 p_2.$$

Aus Figur 206 folgt ferner

$$SD_1^2 = p^2 + DD_1^2 = p^2 + e^2 \sin^2 \alpha.$$

Außerdem war schon in Nr. 145 gezeigt, daß, wenn  $SC_1 = e$  gesetzt wird,

$$p_1 p_2 = p^2 - e^2 \cos^2 \alpha,$$

also

$$p^2 = p_1 p_2 + e^2 \cos^2 \alpha.$$

Demnach ist

$$SD_1^2 = p_1 p_2 + e^2 \cos^2 \alpha + e^2 \sin^2 \alpha$$

$$= p_1 p_2 + e^2 = p_1 p_2 + \varrho_1^2 - \varrho_2^2,$$

folglich unter Berücksichtigung der ersten Gleichung

$$SD_1^2 = \varrho^2 - \varrho_2^2 = SD_2^2.$$

Ist nun  $\varrho$  konstant, so ist auch  $SD_1$  konstant, d. h.  $KL$  liegt dann stets so, daß die von  $C_1$  und  $C_2$  aus darauf gefällten Lote in die

Peripherie des mit  $SD_1 = \sqrt{\varrho^2 - \varrho_2^2}$

um  $S$  geschlagenen Kreises fallen.

Dies ist aber eine bekannte Brennpunkteigenschaft der Ellipse

und der Hyperbel. Ist  $SD_1 > e$ ,

so schneidet  $KL$  die Gerade  $C_1 C_2$  außerhalb der Strecke  $C_1 C_2$ ,

und es handelt sich um eine Ellipse. Dabei ist  $\varrho^2 - \varrho_2^2 > e^2$ ,

d. h.  $\varrho^2 - \varrho_2^2 > \varrho_1^2 - \varrho_2^2$ , demnach

handelt es sich um den Fall  $\varrho > \varrho_1$ .

Ist dagegen  $SD_1 < e$ , so schneidet

die Gerade  $KL$  zwischen  $C_1$  und  $C_2$ ,

was auf den Fall der Hyperbel führt. Dabei ist  $\varrho < \varrho_1$ .

Ist endlich  $SD_1 = e$ , so ist

$\varrho = a$ , d. h. die Strahlen geben

zwei Büschel durch  $C_1$  und  $C_2$ , welches gewissermaßen die un-

endlich flache Ellipse  $C_1 C_2$  bezw. die unendlich flache Hyperbel (die von  $C_1$  nach  $+\infty$ , von  $C_2$  nach  $-\infty$  geht) umhüllt.

Fig. 207 stellt die betreffende Doppelschar confokaler Kegel-

Fig. 206.

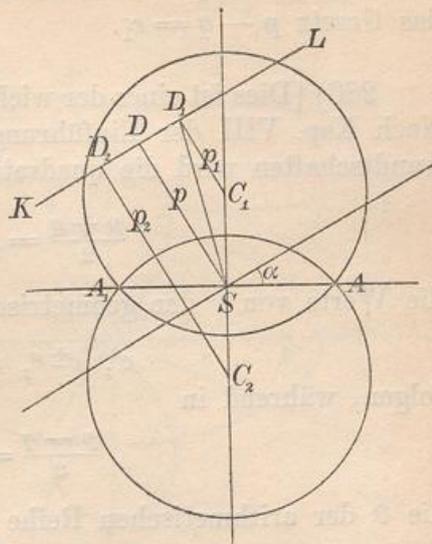
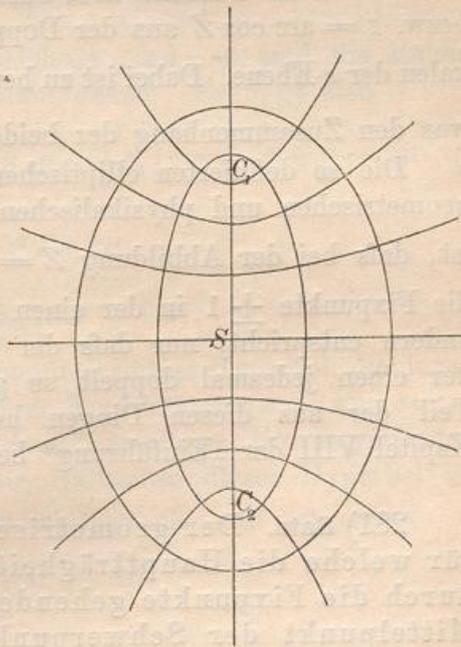


Fig. 207.



schnitte dar. Die eine Schar hat das Gesetz  $p + q = c$ , die andere das Gesetz  $p - q = c_1$ .

280) [Dies ist eines der wichtigsten isothermischen Kurvensysteme. Nach Kap. VIII der Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften wird die quadratische Einteilung erreicht, wenn in

$$\frac{p + q}{2} = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) = c$$

die Werte von  $r$  der geometrischen Reihe

$$e^0, e^{\pm \alpha}, e^{\pm 2\alpha}, e^{\pm 3\alpha}, \dots$$

folgen, während in

$$\frac{p - q}{2} = \cos \vartheta = c_1$$

die  $\vartheta$  der arithmetischen Reihe

$$0, \pm \alpha, \pm 2\alpha, \pm 3\alpha, \dots$$

folgen. Das System entsteht mit Hilfe der Abbildung  $Z = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  bzw.  $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$  aus dem System der concentrischen Kreise und Radien der  $z$ -Ebene, aber auch mit Hilfe der Abbildung  $Z = \cos z$  bzw.  $z = \arccos Z$  aus der Doppelschar der Horizontalen und Vertikalen der  $z$ -Ebene. Dabei ist zu beachten, daß  $\cos z = \frac{1}{2} \left( e^{zi} + \frac{1}{e^{zi}} \right)$  ist, was den Zusammenhang der beiden Abbildungsarten aufklärt.

Die so definierten elliptischen Koordinaten geben zu zahlreichen geometrischen und physikalischen Betrachtungen Anlaß. Interessant ist, daß bei der Abbildung  $Z = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  dem Kreisbüschel durch die Fixpunkte  $\pm 1$  in der einen Ebene wiederum ein solches in der andern entspricht, nur daß der Schnittwinkel zweier Individuen in der einen jedesmal doppelt so groß ist, wie in der andern. Ein Teil der aus diesen Dingen hervorgehenden Folgerungen ist in Kapitel VIII der „Einführung“ behandelt.]

281) **Satz.** Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für welche die Hauptträgheitsachsen parallel sind, ist eine durch die Fixpunkte gehende gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt ist und deren Asymptoten den beiden gegebenen Richtungen parallel sind.

**Beweis.** Die Figur stelle die um  $S$  gelegte Centralellipse dar. Die Achsen  $\xi$  und  $\eta$  sollen die gegebene konstante Richtung der zu untersuchenden Hauptachsen darstellen. Die Winkelhalbierenden  $X$