Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Auftreten von Lemniskaten und Hyperbeln.

schnitte dar. Die eine Schar hat das Gesetz $p + q = c$, die andere das Gesetz $p - q = c_1$.

280) [Dies ist eines der wichtigsten isothermischen Kurvensysteme. Nach Kap. VIII der Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften wird die quadratische Einteilung erreicht, wenn in

$$\frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) = c$$

die Werte von r der geometrischen Reihe

$$e^0,\ e^{\pm\alpha},\ e^{\pm 2\alpha},\ e^{\pm 3\alpha}, \ldots$$

folgen, während in

$$\frac{p-q}{2} = \cos\vartheta = c_1$$

die ϑ der arithmetischen Reihe

$$0,\ \pm\alpha,\ \pm 2\alpha,\ \pm 3\alpha, \cdots$$

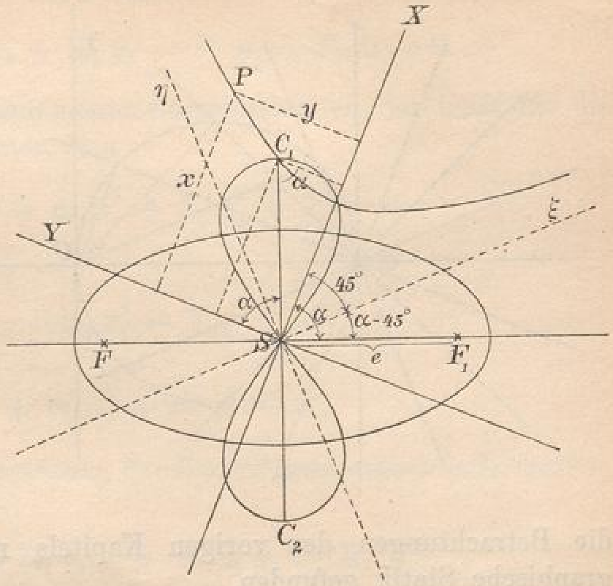
folgen. Das System entsteht mit Hülfe der Abbildung $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ bezw. $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$ aus dem System der concentrischen Kreise und Radien der z-Ebene, aber auch mit Hülfe der Abbildung $Z = \cos z$ bezw. $z = \operatorname{arc}\cos Z$ aus der Doppelschar der Horizontalen und Vertikalen der z-Ebene. Dabei ist zu beachten, daſs $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{zi} + \frac{1}{e^{zi}}\right)$ ist, was den Zusammenhang der beiden Abbildungsarten aufklärt.

Die so definierten elliptischen Koordinaten geben zu zahlreichen geometrischen und physikalischen Betrachtungen Anlaſs. Interessant ist, daſs bei der Abbildung $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ dem Kreisbüschel durch die Fixpunkte ± 1 in der einen Ebene wiederum ein solches in der andern entspricht, nur daſs der Schnittwinkel zweier Individuen in der einen jedesmal doppelt so groſs ist, wie in der andern. Ein Teil der aus diesen Dingen hervorgehenden Folgerungen ist in Kapitel VIII der „Einführung" behandelt.]

281) **Satz.** Der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für welche die Hauptträgheitsachsen parallel sind, ist eine durch die Fixpunkte gehende gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt ist und deren Asymptoten den beiden gegebenen Richtungen parallel sind.

Beweis. Die Figur stelle die um S gelegte Centralellipse dar. Die Achsen ξ und η sollen die gegebene konstante Richtung der zu untersuchenden Hauptachsen darstellen. Die Winkelhalbierenden X

Fig. 208.



und Y geben also die Richtungen der Gleichheitsachsen an, die ebenfalls für alle zu untersuchenden Punkte konstant sind. Diese letzteren mögen mit der Hauptachse der Centralellipse den Winkel α einschliefsen.

Ist nun P ein Punkt des zu untersuchenden Ortes, so ist nach dem Verschiebungssatze und dem Drehungssatze in Bezug auf die beiden Koordinaten x und y für das Trägheitsmoment (vgl. Nr. 133)

$$\varrho_x^2 = \varrho_2^2 \sin^2\alpha + \varrho_1^2 \cos^2\alpha + y^2,$$
$$\varrho_y^2 = \varrho_2^2 \cos^2\alpha + \varrho_1^2 \sin^2\alpha + x^2.$$

Da aber X und Y die Gleichheitsachsen sind, so sind die linken Seiten, folglich auch die rechten Seiten gleich. Es folgt also

$$y^2 - x^2 = \cos^2\alpha\left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right) - \sin^2\alpha\left(\varrho_2^2 - \varrho_1^2\right) = e^2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$$

oder

$$y^2 - x^2 = e^2 \cos 2\alpha,$$

oder auch

$$x^2 - y^2 = e^2 \cos(180^0 - 2\alpha).$$

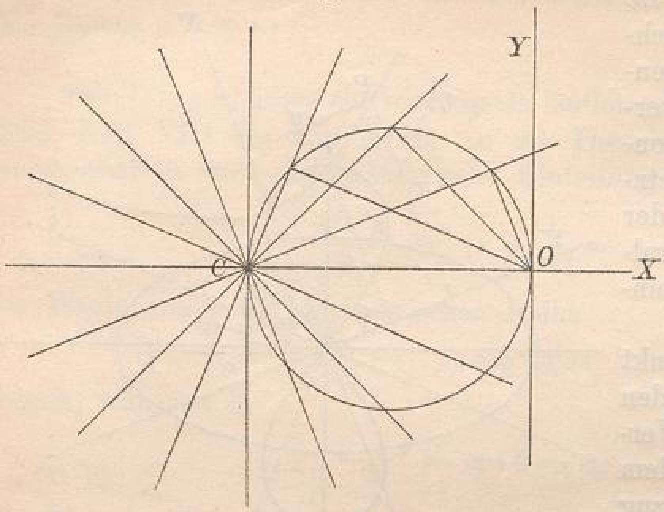
Demnach ist der geometrische Ort eine gleichseitige Hyperbel, die durch die Fixpunkte C_1 und C_2 geht, weil deren Koordinaten $e\cos\alpha$ und $e\sin\alpha$ der Gleichung $y^2 - x^2 = e^2\cos^2\alpha - e^2\sin^2\alpha$ genügen. Ihre Asymptoten aber haben die Richtung ξ, η. Die Halbachse dieser Hyperbel ist gleich $e\sqrt{\cos(180^0 - 2\alpha)}$, der Scheitel liegt also auf der durch

$$r^2 = e^2 \cos(180^0 - 2\alpha)$$

bestimmten Lemniskate.

282) Das durch die Fixpunkte gehende Büschel gleichseitiger Hyperbeln giebt die geometrischen Orte für alle möglichen konstanten Richtungen von Hauptachsen an. Die Figur ist nichts anderes, als

Fig. 209.



die Abbildung der nebenstehenden mit Hülfe der Funktion $Z = \sqrt{z}$, wobei C nach den Fixpunkten C_1 und C_2 transformiert wird. Das Strahlenbüschel durch C giebt das Hyperbelbüschel durch C_1 und C_2, der Fufspunktkreis durch O und C giebt die Lemniskate durch O, C_1 und C_2.

So haben denn die Betrachtungen des vorigen Kapitels neue Bedeutung für die graphische Statik gefunden.

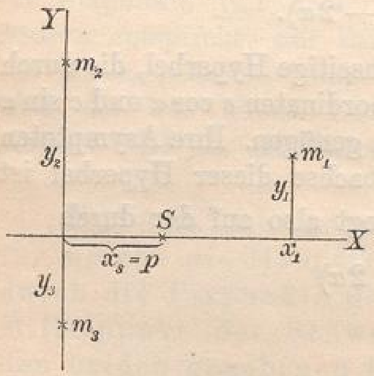
F. Ersatz der homogenen ebenen Fläche F durch drei Massenpunkte nach Reye.

283) Soll eine Fläche F in mechanischer Hinsicht durch drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 ersetzt werden, z. B. bezüglich der Drehung um irgend einen Punkt oder eine Gerade der Ebene, so mufs zunächst sein

$$1) \qquad m_1 + m_2 + m_3 = F.$$

Werden hierbei m_1 und m_2 willkürlich gewählt, so ist die dritte Masse durch $m_3 = F - (m_1 + m_2)$ bestimmt.

Fig. 210.



Damit z. B. auch die Centrifugalkräfte übereinstimmen, müssen die statischen Momente der Fläche und des Punktsystems in Bezug auf willkürliche Koordinatenachsen identisch sein, so dafs auch die Schwerpunkte zusammenfallen. Um die Gleichungen möglichst einfach zu machen, kann man die Gerade $m_2 m_3$ zur Y-Achse machen, das vom Schwerpunkte S auf diese Gerade gefällte Lot zur X-Achse. Dann mufs in Bezug auf die Y-Achse sein

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = F x_s,$$

oder, da $x_2 = x_3 = 0$,

$$2) \qquad m_1 x_1 = F x_s = F p.$$