



## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

**Holzmüller, Gustav**

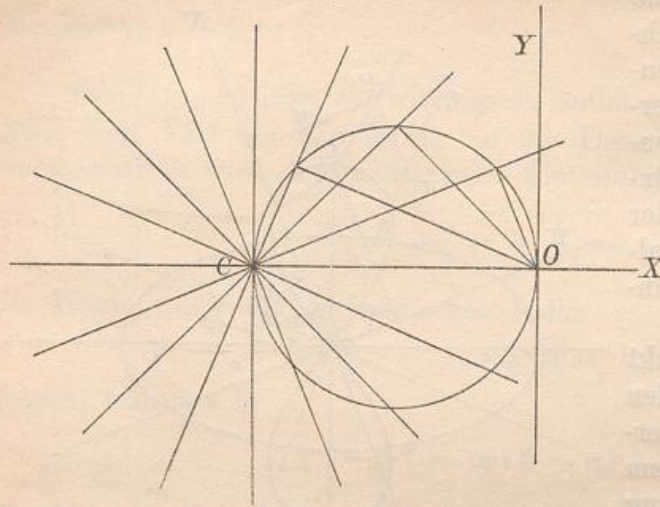
**Leipzig, 1897**

Der allgemeine Fall.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Fig. 209.



die Abbildung der nebenstehenden mit Hilfe der Funktion  $Z = \sqrt{z}$ , wobei  $C$  nach den Fixpunkten  $C_1$  und  $C_2$  transformiert wird. Das Strahlenbündel durch  $C$  giebt das Hyperbelbündel durch  $C_1$  und  $C_2$ , der Fußpunktkreis durch  $O$  und  $C$  giebt die Lemniskate durch  $O$ ,  $C_1$  und  $C_2$ .

So haben denn die Betrachtungen des vorigen Kapitels neue Bedeutung für die graphische Statik gefunden.

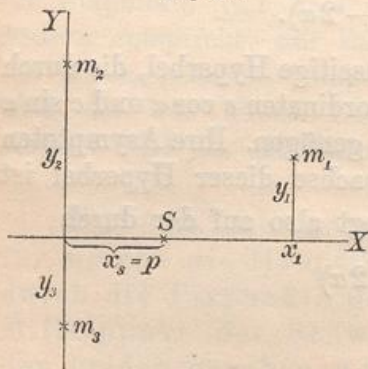
### F. Ersatz der homogenen ebenen Fläche $F$ durch drei Massenpunkte nach Reye.

283) Soll eine Fläche  $F$  in mechanischer Hinsicht durch drei Massenpunkte  $m_1, m_2, m_3$  ersetzt werden, z. B. bezüglich der Drehung um irgend einen Punkt oder eine Gerade der Ebene, so muß zunächst sein

$$1) \quad m_1 + m_2 + m_3 = F.$$

Werden hierbei  $m_1$  und  $m_2$  willkürlich gewählt, so ist die dritte Masse durch  $m_3 = F - (m_1 + m_2)$  bestimmt.

Fig. 210.



Damit z. B. auch die Centrifugalkräfte übereinstimmen, müssen die statischen Momente der Fläche und des Punktsystems in Bezug auf willkürliche Koordinatenachsen identisch sein, so daß auch die Schwerpunkte zusammenfallen. Um die Gleichungen möglichst einfach zu machen, kann man die Gerade  $m_2 m_3$  zur  $Y$ -Achse machen, das vom Schwerpunkte  $S$  auf diese Gerade gefällte Lot zur  $X$ -Achse. Dann muß in Bezug auf die  $Y$ -Achse sein

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = F x_s,$$

oder, da  $x_2 = x_3 = 0$ ,

$$2) \quad m_1 x_1 = F x_s = F p.$$



In Bezug auf die X-Achse muß sein

$$3) \quad m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = F \cdot y_s = F \cdot 0 = 0.$$

Damit auch die Trägheitsmomente übereinstimmen, so muß für die gewählten Koordinatenachsen sein

$$m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = T_y$$

oder, da  $x_2 = 0 = x_3$  ist,

$$4) \quad m_1 x_1^2 = T_y,$$

und

$$5) \quad m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 = T_x.$$

Endlich ist noch Übereinstimmung der Centrifugalmomente erforderlich, d. h. es muß sein

$$m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3 = M_{xy},$$

oder einfacher

$$6) \quad m_1 x_1 y_1 = M_{xy}.$$

Da die Anzahl der Unbekannten  $m_1, m_2, m_3, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  größer ist, als die der Gleichungen, so kann man die Größe und Lage der drei Massenpunkte nicht durch Rechnung bestimmen, sondern man darf drei Elemente willkürlich wählen und die übrigen sechs berechnen. An Stelle der Rechnung aber können geometrische Beziehungen treten, wie sie aus der Lehre vom geometrischen Orte bekannt sind.

Zunächst ergibt sich Folgendes: Aus Gleichung 2) und 4) folgt durch Division

$$x_1 = \frac{T_y}{pF} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}},$$

aus 6) und 2) folgt

$$y_1 = \frac{M_{xy}}{m_1 x_1} = \frac{M_{xy}}{pF} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Nach Nr. 274 ist demnach  $m_1$  der Antipol der Koordinatenachsen in Bezug auf die Centralellipse der Fläche. Ist diese bekannt, so kann also die Lage von  $m_1$  nach Nr. 273 leicht konstruiert werden, sobald nur  $m_2$  und  $m_3$  festgelegt sind.

Was von der Geraden  $m_2 m_3$  gilt, gilt auch von den Geraden  $m_3 m_1$  und  $m_1 m_2$ . Also:

Die drei Massenpunkte müssen so liegen, daß jeder von ihnen der Antipol für die Verbindungslinie der beiden andern in Bezug auf die Centralellipse von  $F$  ist.



Angenommen, diese Aufgabe wäre gelöst, dann findet sich die Größe der Massen aus den Gleichungen

$$m_1 = \frac{Fp}{x_1}, \quad m_2 + m_3 = F - m_1, \quad m_2 y_2 + m_3 y_3 = -m_1 y_1.$$

Damit würde die Aufgabe überhaupt erledigt sein.

284) Um weitere Gesichtspunkte aufzufinden, denke man sich die Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  der Größe nach willkürlich gegeben und nach Art der Figur 211 die Centralellipse in das System eingezeichnet, wobei zunächst nur darauf Rücksicht zu nehmen ist, daß  $x_1$  als Antipol der Koordinatenachsen erscheint.

In Nr. 274 war nun

$$x_1 = \frac{p^2 + a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{p} = p + \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{p} + \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{p},$$

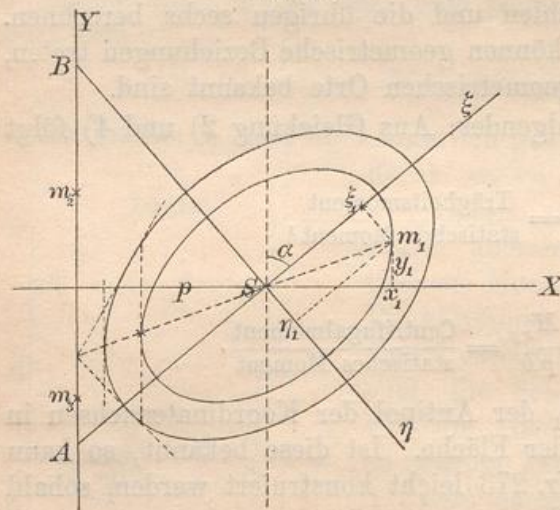
also

$$\frac{x_1}{p} = 1 + \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{p^2} + \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{p^2},$$

oder, da nach Gleichung 2)

$$\frac{x_1}{p} = \frac{F}{m_1}, \quad \text{also} \quad \frac{x_1}{p} - 1 = \frac{F}{m_1} - 1 = \frac{F - m_1}{m_1}$$

Fig. 211.



ist,

$$\frac{F - m_1}{m_1} = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{p^2} + \frac{b^2 \cos^2 \alpha}{p^2}.$$

Dort war ferner

$$\xi_1 = \frac{a^2}{p} \sin \alpha, \quad \eta_1 = \frac{b^2}{p} \cos \alpha,$$

so daß man hat

$$\frac{F - m_1}{m_1} = \frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2}.$$

Demnach ist der geometrische Ort von  $m_1$  eine Ellipse mit dem Mittelpunkte  $S$ , die der Centralellipse ähnlich ist und ähnlich zu ihr liegt. Ihre Achsen sind von der Länge

$$a_1 = a \sqrt{\frac{F - m_1}{m_1}}, \quad b_1 = b \sqrt{\frac{F - m_1}{m_1}}.$$

Ebenso ist es mit den andern Massenpunkten. Also:



Denkt man sich  $m_1, m_2$  (und dadurch  $m_3$ ) der Gröfse nach gewählt, so sind die drei Punkte in ihrer Lage auf drei Ellipsen mit dem Mittelpunkt  $S$  beschränkt, die ähnlich und ähnlich liegend zur Centralellipse sind und folgende Gleichungen haben:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} = \frac{F - m_1}{m_1}, \quad \frac{\xi_2^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = \frac{F - m_2}{m_2},$$

$$\frac{\xi_3^2}{a^2} + \frac{\eta_3^2}{b^2} = \frac{F - m_3}{m_3}.$$

285) Einen von den Punkten darf man auf der ihm entsprechenden Ellipse willkürlich legen. Die Lage der andern ergibt sich dann aus Folgendem:

Es wird sich zeigen, dafs das von den Punkten gebildete Dreieck einen konstanten Inhalt haben mufs.

Nach Gleichung 1) und 5) ist nämlich

$$m_2 + m_3 = F - m_1,$$

$$m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 = T_x - m_1 y_1^2,$$

folglich durch Multiplikation

$$m_2^2 y_2^2 + m_2 m_3 (y_2^2 + y_3^2) + m_3^2 y_3^2 = T_x (F - m_1) - F m_1 y_1^2 + m_1^2 y_1^2.$$

Da nach Gleichung 3)

$$m_2 y_2 + m_3 y_3 = -m_1 y_1$$

und durch Quadrierung

$$m_2^2 y_2^2 + 2m_2 m_3 y_2 y_3 + m_3^2 y_3^2 = m_1^2 y_1^2$$

ist, so ergibt sich durch Subtraktion

$$m_2 m_3 (y_2^2 - 2y_2 y_3 + y_3^2) = T_x (F - m_1) - F m_1 y_1^2.$$

Multipliziert man beiderseits mit  $m_1 x_1^2$ , so folgt

$$m_1 m_2 m_3 (y_2 - y_3)^2 x_1^2 = (F - m_1) m_1 x_1^2 T_x - F m_1^2 x_1^2 y_1^2.$$

Nun ist der Inhalt des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks

$$\Delta = \frac{1}{2} (y_2 - y_3) x_1,$$

folglich

$$4\Delta^2 m_1 m_2 m_3 = 4 \cdot \frac{1}{4} (y_2 - y_3)^2 x_1^2 m_1 m_2 m_3$$

$$= (F - m_1) m_1 x_1^2 T_x - F m_1^2 x_1^2 y_1^2.$$



Da nach Gleichung 6)

$$m_1 x_1 y_1 = M_{xy}$$

und, wenn  $T_s$  das Trägheitsmoment von  $F$  in Bezug auf die senkrechte Schwerpunktsachse bedeutet,

$$m_1 x_1^2 = T_y = T_s + Fp^2$$

ist, so folgt

$$4\Delta^2 m_1 m_2 m_3 = (F - m_1) (T_s + Fp^2) T_x - FM_{xy}^2$$

oder

$$4\Delta^2 m_1 m_2 m_3 = FT_s T_x - FM_{xy}^2 + T_x [F^2 p^2 - m_1 (T_s + Fp^2)].$$

Setzt man wieder  $m_1^2 x_1^2 = F^2 p^2$  und  $m_1 (T_s + Fp^2) = m_1^2 x_1^2$  ein, so wird der dritte Posten gleich Null, und es bleibt stehen

$$4\Delta^2 m_1 m_2 m_3 = F (T_s T_x - M_{xy}^2),$$

woraus folgt

$$4\Delta^2 \frac{m_1 m_2 m_3}{F} = T_s T_x - M_{xy}^2.$$

Nach dem Verschiebungssatze für das Centrifugalmoment ist dieses für die  $X$ -Achse und die durch  $S$  gelegte Senkrechte ebenso groß, wie  $M_{xy}$ , so daß man schreiben kann

$$M_{xs} = M_{xy}.$$

Nach Nr. 152 ist dann

$$M_{xs}^2 = T_x T_s - a^2 b^2 F^2$$

oder

$$T_x T_s - M_{xs}^2 = a^2 b^2 F^2.$$

Dies in die obige Gleichung eingesetzt giebt

$$4\Delta^2 \frac{m_1 m_2 m_3}{F} = a^2 b^2 F^2,$$

so daß

$$\Delta = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{F^3}{m_1 m_2 m_3}}.$$

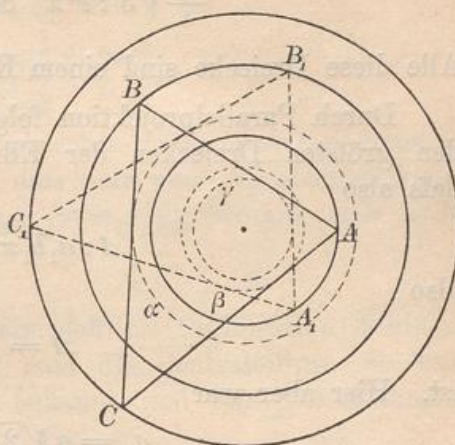
Damit ist nachgewiesen, daß das von den Massenpunkten gebildete Dreieck nicht von der Lage der Punkte auf den drei Ellipsen abhängig ist, sondern einen konstanten Inhalt hat. Hat man eins von diesen Dreiecken, so kann man unendlich viele andere leicht konstruieren. Sind nämlich  $r_1, r_2, r_3$  die Radien von drei concentrischen Kreisen, auf deren Umfängen die Ecken eines Dreiecks  $ABC$  liegen, so berührt jede Seite einen concen-



trischen Kreis  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Beginnt man das Tangenziehen an einer andern Stelle  $A_1$  des ersten Kreises, so schließt die Figur stets und erhält konstanten Inhalt.

Durch Parallelprojektion entsteht eine Figur aus concentrischen und ähnlichen Ellipsen. Auch bei diesen schließt die Tangentenkonstruktion stets und giebt ebenfalls flächengleiche Dreiecke. Daraus ergeben sich unendlich viele mögliche Lagen der drei Punkte.

Fig. 212.



286) Aufgabe. Eine Fläche  $F$  durch drei mit gleicher Masse belegte Punkte zu ersetzen.

Auflösung. Jede der Massen ist gleich  $\frac{F}{3}$  zu setzen.

Die drei oben besprochenen Ellipsen fallen in eine einzige zusammen, deren Gleichung wird

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{F - \frac{F}{3}}{\frac{F}{3}} = 2$$

oder

$$\frac{\xi^2}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{\eta^2}{(b\sqrt{2})^2} = 1.$$

Ihre Achsen sind also das  $\sqrt{2}$ -fache von den Achsen der Central-ellipse.

Das von den drei Massenpunkten gebildete Dreieck erhält den Inhalt

$$\Delta = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{F^3}{\frac{F^3}{27}}} = \frac{3ab}{2} \sqrt{3}.$$

Dies ist aber, wie leicht gezeigt werden kann, der Inhalt der größten Dreiecke, die sich überhaupt einer Ellipse einbeschreiben lassen.

Das größte aller Dreiecke, die dem Kreise einbeschrieben werden können, ist, wie leicht bewiesen werden kann, das gleichseitige. Sein Inhalt ist  $\frac{3r^2}{4} \sqrt{3}$ .

Er verhält sich zum Kreisinhalt, wie