UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Der Sonderfall gleicher Massenpunkte.

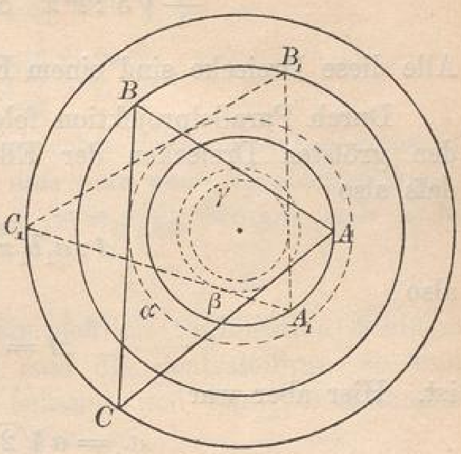
urn:nbn:de:hbz:466:1-76845

Visual Library

trischen Kreis α, β, γ. Beginnt man das Tangentenziehen an einer andern Stelle A_1 des ersten Kreises, so schliefst die Figur stets und erhält konstanten Inhalt.

Durch Parallelprojektion entsteht eine Figur aus concentrischen und ähnlichen Ellipsen. Auch bei diesen schliefst die Tangentenkonstruktion stets und giebt ebenfalls flächengleiche Dreiecke. Daraus ergeben sich unendlich viele mögliche Lagen der drei Punkte.

Fig. 212.



286) **Aufgabe.** Eine Fläche F durch drei mit gleicher Masse belegte Punkte zu ersetzen.

Auflösung. Jede der Massen ist gleich $\frac{F}{3}$ zu setzen.

Die drei oben besprochenen Ellipsen fallen in eine einzige zusammen, deren Gleichung wird

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{F-\frac{F}{3}}{\frac{F}{3}}=2$$

oder

$$\frac{\xi^2}{(a\sqrt{2})^2}+\frac{\eta^2}{(b\sqrt{2})^2}=1.$$

Ihre Achsen sind also das $\sqrt{2}$-fache von den Achsen der Centralellipse.

Das von den drei Massenpunkten gebildete Dreieck erhält den Inhalt

$$\Delta=\frac{ab}{2}\sqrt{\frac{F^3}{\frac{F^3}{27}}}=\frac{3ab}{2}\sqrt{3}.$$

Dies ist aber, wie leicht gezeigt werden kann, der Inhalt der gröfsten Dreiecke, die sich überhaupt einer Ellipse einbeschreiben lassen.

Das gröfste aller Dreiecke, die dem Kreise einbeschrieben werden können, ist, wie leicht bewiesen werden kann, das gleichseitige. Sein Inhalt ist $\frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$.

Er verhält sich zum Kreisinhalte, wie

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\frac{3r^2}{4}\sqrt{3} : r^2\pi \quad \text{oder wie} \quad \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} : 1.$$

Alle diese Dreiecke sind einem Kreise vom Radius $\frac{r}{2}$ umbeschrieben.

Durch Parallelprojektion folgt, daſs dasselbe Verhältnis zwischen den gröſsten Dreiecken der Ellipse und ihrem Inhalte stattfindet, daſs also

$$\varDelta : a_1 b_1 \pi = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} : 1,$$

also

$$\varDelta = \frac{a_1 b_1 3\sqrt{3}}{4}$$

ist. Hier aber war

$$a_1 = a\sqrt{2}, \quad b_1 = b\sqrt{2},$$

also

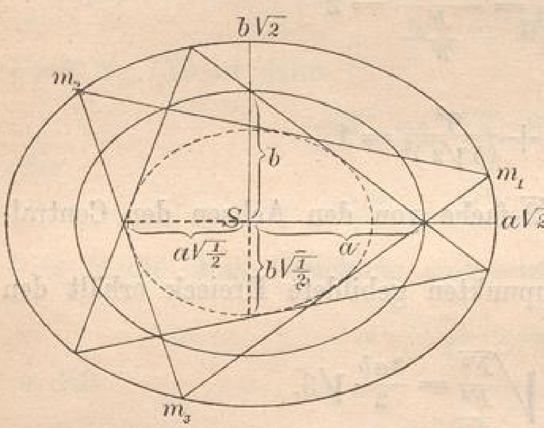
$$a_1 b_1 = 2ab,$$

es ist also

$$\varDelta = \tfrac{3}{2}\, ab\sqrt{3}.$$

Damit ist die obige Behauptung bewiesen. Alle diese Dreiecke sind aber einer ähnlichen Ellipse halben Maſsstabes umbeschrieben.

Fig. 213.



In Fig. 213 sei die mittlere Ellipse die Centralellipse der Fläche F mit den Halbachsen a und b; die gröſste Ellipse habe die Halbachsen $a\sqrt{2}$ und $b\sqrt{2}$, die kleinste die Halbachsen $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $b\sqrt{\frac{1}{2}}$. Um die kleinste Ellipse lassen sich unendlich viele Tangentendreiecke legen, die ihre Ecken auf der gröſsten Ellipse haben. Bringt man in den Ecken eines beliebigen dieser Dreiecke Massen von der Gröſse $\frac{F}{3}$ an, so können diese Massen die Fläche F in mechanischer Hinsicht ersetzen.

287) Der Hauptvorteil der Reyeschen Methode beruht darin, daſs man die statischen und die Trägheitsmomente einer Figur für beliebige Achsen sofort hinschreiben kann, sobald man eins der Punktdreiecke kennt. Sind nämlich x_1, x_2, x_3 die Entfernungen der

Punkte von der Achse, so ist das gesuchte $T_1 = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2$, dagegen ist $M = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$, also z. B.

$$\frac{T_x}{M_y} = \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2}{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}.$$

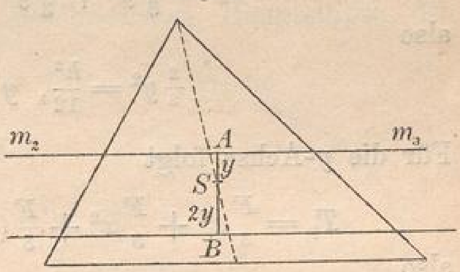
Dasselbe kann in Bezug auf jede Senkrechte zu jener Achse gemacht werden, wodurch man T_y erhält, so dafs man auch T_p ableiten kann. Ferner wird $M_{xy} = m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3$, woraus sich z. B. $\frac{T_x}{M_{xy}}$ und $\frac{T_y}{M_{xy}}$ entwickeln läfst.

Endlich lassen sich durch Parallelprojektion (Collineation) Schlüsse auf andere Figuren ziehen. Kennt man die Centralellipse, so sind auch die beiden andern Ellipsen bekannt und alle Berechnungen kommen auf die eines Punktdreiecks hinaus.

Einige Beispiele werden dies erläutern.

288) Das Dreieck. Sollen die Punkte gleiche Massen $\frac{F}{3}$ haben, so mufs für den Fall, dafs die Verbindungslinie $m_2 m_3$ der Basis parallel sein soll, $SA : SB = 1 : 2$ sein. Es folgt also

Fig. 214.



$$\frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} y^2 + \frac{F}{3} (2y)^2 = \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}$$

oder

$$2y^2 = \frac{h^2}{18},$$

also

$$y = \frac{h}{6}, \; 2y = \frac{h}{3},$$

d. h. der untere Punkt fällt in die Grundlinie, die beiden andern in die Verbindungslinie der Halbierungspunkte. Für das gleichseitige Dreieck also ist das Fufspunktdreieck der Höhen, für jedes beliebige Dreieck durch Parallelprojektion das Fufspunktdreieck der Mittellinien eins der gesuchten. Von der äufseren Ellipse hat man, da $SG = GD$, $SH = SE$, $SJ = SF$ sein mufs, sechs Punkte. Diese Ellipse aber ist identisch mit der in D, E, F berührenden. Dies konnte auch durch Projektion aus dem Falle des gleichseitigen Dreiecks geschlossen werden, wo es sich um

Fig. 215.