Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

A. Newton-Simpsonsche Regel für Körper und Flächen und Schichtenformel für Querschnitte bis zur dritten Ordnung.

Abschnitt V.

Einige Hülfsmittel der Elementar-Mathematik.

(Methode der unendlich dünnen Schichten.)

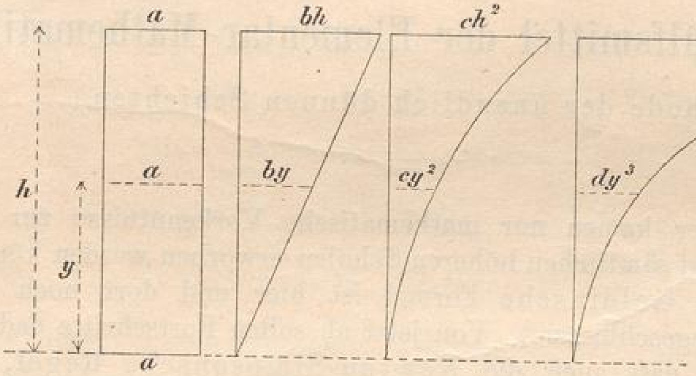
154) Bisher kamen nur mathematische Vorkenntnisse zur Anwendung, die auf sämtlichen höheren Schulen erworben werden können. (Höchstens die Guldinsche Formel ist hier und dort noch vom Gymnasium ausgeschlossen.) Von jetzt ab sollen Fortschritte dadurch erzielt werden, dafs auch die Newton-Simpsonsche Regel, die Schichtenformel oder Summenformel für ganze positive Exponenten und die Schichtenformel für gebrochene und für negative Exponenten zur Anwendung gelangen. In dem Methodischen Lehrbuche des Verfassers über die Elementarmathematik ist das Nötigste darüber gesagt, auch sind dort zahlreiche Beispiele gegeben, besonders im dritten Teile. Für Nichtbesitzer des Buches sei das Nötigste auch hier auszugsweise dargestellt. Jede der drei Formeln ist ein förmlicher Hebel der Elementarmathematik, mit dessen Hülfe weite Gebiete der Technik bezwungen werden können. Zum Schlufs soll noch die erweiterte Simpsonregel für angenäherte Berechnungen erörtert werden.

A. Die Newton-Simpsonsche Regel für Körper und Flächen und die Schichtenformel für Querschnitte bis zur dritten Ordnung.

155) Fig. 130 stellt den Aufrifs von vier Körpern gleicher Höhe dar. Der erste sei ein Prisma oder ein Cylinder, dessen Querschnittsfläche überall gleich a ist. Sein Inhalt ist ah. Der zweite sei ein Dreieckskörper, dessen Querschnittsfläche in jeder Höhe y gleich by sei, also in der Höhe h gleich bh. Sein Inhalt ist $\frac{bh^2}{2}$. Bei dem dritten nehme die Querschnittsfläche zu, wie bei einem geraden Kreiskegel oder einer geraden Pyramide, die auf die Spitze gestellt sind, d. h. die Querschnittsfläche soll proportional dem Quadrate der Höhe sein,

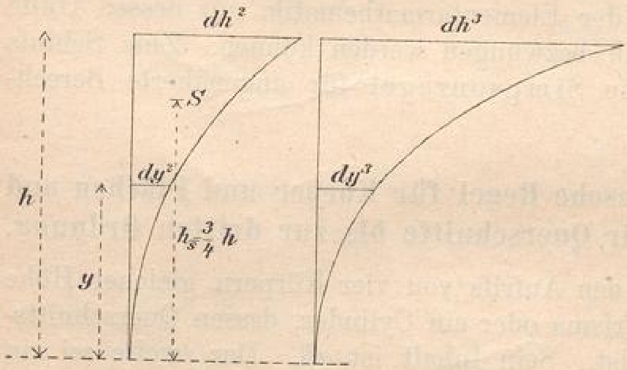
z. B. gleich cy^2 in jeder Höhe y, gleich ch^2 in der Höhe h. In der Zeichnung ist der Körper so gedacht, dafs er als gerade Säule über der Zeichnungsebene steht und zwar über der gezeichneten Fläche, die nach dem Früheren auf der einen Seite parabolisch begrenzt sein mufs. Der gezeichnete Körper, und der mit ihm verglichene Kegel, bezw. die mit ihm verglichene Pyramide haben sämtlich die Höhe h und die Grundfläche ch^2, ihre Querschnittsflächen sind in gleichen

Fig. 130.



Höhen inhaltsgleich, folglich stimmen nach Cavalieri auch die körperlichen Inhalte überein. Jeder ist also, wie die Pyramide, vom Inhalt $G\frac{h}{3}$ oder $\frac{ch^3}{3}\cdot$ (Die Parabel schneidet vom Rechteck den dritten Teil ab.) Bei dem vierten Körper sei die Querschnittsfläche proportional der 3^{ten} Potenz der Höhe, und zwar soll den Höhen y und h bezw. dy^3 bezw. dh^3 entsprechen. Dafs er den Inhalt $\frac{dh^4}{4}$ hat, läfst sich folgendermafsen zeigen: Figur 131 stellt den dritten und vierten Körper noch einmal dar, nur ist beim dritten d statt c geschrieben.

Fig. 131.



Nach Cavalieri liegt bei dem letzteren der Schwerpunkt, wie bei der Pyramide, in der Höhe $\frac{3}{4}h$. Das statische Moment des Körpers in Bezug auf die Grundfläche ist also $M = J\,\frac{3}{4}\,h = \frac{dh^3}{3}\,\frac{3}{4}\,h = \frac{dh^4}{4}$.

Das statische Moment der Fläche dy^2 in Bezug auf die Grundfläche ist aber $dy^2 \cdot y = dy^3$, das der obersten Fläche $dh^2 \cdot h = dh^3$, und gerade so grofs sind die entsprechenden Querschnittsflächen des daneben stehenden Körpers. Weil nun die Mafszahlen für die Querschnittsflächen des letzteren ebenso grofs sind, wie die Mafszahlen der statischen Momente für die Flächen des vorigen, so mufs die Mafszahl für den Inhalt des letzten Körpers dieselbe sein, wie die Mafszahl für das statische Moment des vorigen, nämlich $\frac{dh^4}{4}$.

So hat man zunächst folgenden Satz:

Ist der Querschnitt eines Körpers in jeder Höhe y von der Form $q = a$, oder $q = by$, oder $q = cy^2$, oder $q = dy^3$, so ist der Inhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe h genommen $J = ah$ bezw. $J = \frac{bh^2}{2}$, $J = \frac{ch^3}{3}$, $J = \frac{dh^4}{4}$. Es wird sich unten zeigen, dafs man ganz allgemein für jedes positive p sagen kann, zum Querschnitte $q = ky^p$ gehöre der Inhalt $J = \frac{kh^{p+1}}{p+1}$.

Weil jede von diesen Formeln durch Betrachtung der Querschnittsflächen oder besser der unendlich dünnen Schichten gewonnen wird, deren Summe den körperlichen Inhalt giebt, kann man jede als eine Schichtenformel oder Summenformel bezeichnen.

156) Was von den vier gezeichneten Körpern gilt, gilt auch von ihren Aufrifsflächen in Fig. 132. Also:

Ist die Querlinie einer ebenen Fläche in jeder Höhe y von der Länge $q = a$, oder $q = by$ oder $q = cy^2$ oder $q = dy^3$, so ist der Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe h genommen $F = ah$ bezw. $F = \frac{bh^2}{2}$, $F = \frac{ch^3}{3}$, $F = \frac{dh^4}{4}$.

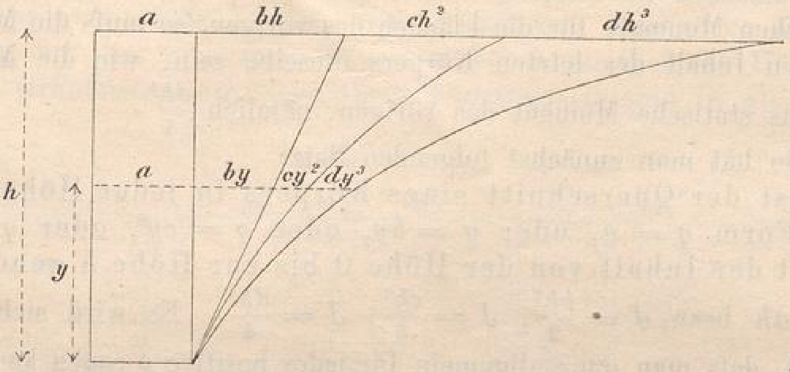
Mit anderen Worten: Die Parabel 0^{ter}, 1^{ter}, 2^{ter}, 3^{ter} Ordnung schneidet vom Rechteck den 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten} Teil ab $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$. Hier sind also zwei Gerade als Parabeln 0^{ter} bezw. 1^{ter} Ordnung bezeichnet worden.

Dies gilt auch dann, wenn man jeden Querschnitt in seinem Niveau irgendwie verschiebt. So kann z. B. die linke Grenzlinie auch eine schräge Gerade, oder eine Parabel 2^{ter} oder 3^{ter} Ordnung sein, an die sich dann die horizontalen Schnitte anzulegen haben. Dadurch wird nun die folgende Betrachtung ermöglicht.

157) Denkt man sich die in gleichen Höhen liegenden Schichten der vier Körper vereinigt, so entsteht ein Körper, dessen Querschnittsfläche in jeder Höhe y ist $q = a + by + cy^2 + dy^3$. Sein Inhalt aber mufs sein $J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$.

Nach Cavalieri mufs dieses Resultat allgemeine Geltung haben. So erhält man den

Fig. 132.



Satz: Hat ein Körper in jeder Höhe y den Querschnitt

1) $$q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist sein Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe h gerechnet

2) $$\overset{h}{\underset{0}{J}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

158) Ebenso gilt der

Satz: Hat eine ebene Fläche in jeder Höhe y die Querlinie

1) $$q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist ihr Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe h gerechnet

2) $$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

Jede Formel 2) soll als die Schichtenformel (Summenformel) für Körper bezw. Flächen bis zur dritten Ordnung bezeichnet werden.

159) Es läfst sich nun zeigen, dafs damit auch die Simpson-Newtonsche Regel bewiesen ist, welche lautet:

Hat ein Körper in jeder Höhe y die Querschnittsfläche

$$q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist sein Inhalt von der Höhe Null bis zur Höhe h berechnet

$$J = \frac{h}{6}[U + O + 4M],$$

wo U den Unterschnitt, O den Oberschnitt, M den Mittelschnitt bedeutet.

Beweis. In Fig. 132 ist der Unterschnitt, d. h. der Schnitt für die Höhe $y = 0$, $U = a$, der Oberschnitt $O = a + bh + ch^2 + dh^3$, der Mittelschnitt $M = a + b\frac{h}{2} + c\left(\frac{h}{2}\right)^2 + d\left(\frac{h}{3}\right)^3 = a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} + \frac{dh^3}{8}$.

Setzt man dies in $\frac{h}{6}[U + O + 4M]$ ein, so ergiebt sich

$$\frac{h}{6}\left[a + (a + bh + ch^2 + dh^3) + 4\left(a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} + \frac{dh^3}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

Letzteres ist aber nach Nr. 157 der Inhalt J, folglich ist

$$\frac{h}{6}[U + O + 4M] = J.$$

160) Ebenso gilt für Flächen der Satz:

Hat eine Fläche in jeder Höhe y eine Querlinie von der Länge

$$q = a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist ihr Inhalt, von der Höhe Null bis zur Höhe h gerechnet,

$$F = \frac{h}{6}[u + o + 4m],$$

wo u die unterste, o die oberste, m die in halber Höhe liegende Querlinie bedeutet.

161) Selbstverständlich können bei beiden Sätzen beliebig viele der Faktoren a, b, c und d gleich Null sein. Demnach wird bald die Schichtenformel, bald die Simpsonsche Regel das Bequemere sein.

Während, wie sich zeigen wird, die Schichtenformel über die 3te Ordnung hinaus weiter gilt, ist dies bei der Simpsonregel nicht der Fall. Diese gilt z. B. nicht mehr für den Körper mit Querschnittsformel $q = dy^4$. Bei diesem würde sie geben

$$J = \frac{h}{6}\left[0 + dh^4 + 4\left(\frac{d}{2}\right)^4\right] = \frac{h}{6}\left[dh^4 + \frac{dh^4}{4}\right] = \frac{5}{24}dh^5,$$

was falsch ist, da nach der später zu beweisenden richtigen Formel $\frac{dh^5}{5}$ oder $\frac{5}{25}dh^5$ herauskommen müfste. Hier also könnte die Simpson-Newtonsche Regel höchstens als rohe Annäherungsformel gebraucht werden.

Sobald es sich um ganze positive Exponnenten handelt und in der Querschnittsformel der dritte Grad nicht überstiegen wird, kann die Simpsonsche Regel angewandt werden, sonst ist ihre Anwendung nicht zulässig.

162) Bezüglich der Summenformel ist noch Folgendes zu bemerken. Aus

$$\overset{h_2}{\underset{0}{F}} = \frac{ah_2}{1} + \frac{bh_2^2}{2} + \frac{ch_2^3}{3} + \frac{dh_2^4}{4}$$

und

$$\overset{h_1}{\underset{0}{F}} = \frac{ah_1}{1} + \frac{bh_1^2}{2} + \frac{ch_1^3}{3} + \frac{dh_1^4}{4}$$

folgt durch beiderseitige Subtraktion als Fläche von h_1 bis h_2

$$\overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = \frac{a(h_2 - h_1)}{1} + \frac{b(h_2^2 - h_1^2)}{2} + \frac{c(h_2^3 - h_1^3)}{3} + \frac{d(h_2^4 - h_1^4)}{4},$$

wofür man wohl auch abgekürzt schreibt

$$\overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = \left| \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4} \right|_{y=h_1}^{y=h_2}.$$

Damit werden die Parallelschichten der entsprechenden Körper und Flächen in der Regel bequemer, als mit der Simpsonschen Regel, berechnet, weil bei dieser der Mittelschnitt besonderer Berechnung bedarf, die hier überflüssig ist.

Für die einfachen Parabeln bis zur dritten Ordnung sind die entsprechenden Inhaltsformeln:

$$\overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = a\frac{h_2 - h_1}{1}, \quad \overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = b\frac{h_2^2 - h_1^2}{2}, \quad \overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = c\frac{h_2^3 - h_1^3}{3}, \quad \overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = d\frac{h_2^4 - h_1^4}{4}.$$

163) Die Anwendungen auf Flächen sind zunächst von geringerer Bedeutung. Dagegen lassen sich, wie im 2ten und 3ten Bande des Methodischen Lehrbuchs gezeigt wird, zahlreiche Körper auf dem vorgeschlagenen Wege berechnen. Von dem Prisma, dem Dachkörper und der Pyramide abgesehen, handelt es sich z. B. um Pyramidenstumpf, Kegelstumpf, Prismatoid mit ebenen und windschiefen Seitenflächen, mit geradlinig oder krummlinig begrenzten Grundflächen, um die Kugel mit ihren Segmenten und Parallelschichten, das Drehungsellipsoid und dreiachsige Ellipsoid mit Segmenten und Parallelschichten, um die Parallelschichten des einmanteligen Drehungshyperboloids und des einmanteligen dreiachsigen Hyperboloids, um die Segmente und Schichten des zweimanteligen Hyperboloids und um einige Arten von Drehungsparaboloiden höherer Ordnung.

164) Die Formeln lassen aber noch anderweitige Deutungen zu. Ist

$$1)\qquad q = a + by + cy^2 + dy^3$$

das statische Moment des Flächen- oder Körperquerschnitts in Bezug auf die Basis, so ist

$$2)\qquad \overset{h}{\underset{0}{M}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

das gesamte statische Moment der Fläche, von 0 bis h genommen.

Ist 1) die Formel für das Trägheitsmoment der Fläche oder des Körpers in Bezug auf die Basis, so ist

$$3)\qquad \overset{h}{\underset{0}{T}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

das gesamte Trägheitsmoment in Bezug auf die Basis.

Ist 1) die Formel für den Querschnitt des Arbeitsdiagramms, bedeutet es also die Gröfse der Kraft an der Stelle y, so ist

$$4)\qquad \overset{h}{\underset{0}{A}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

die gesamte Arbeit längs des Weges 0 bis h.

Ist 1) das Gewicht des Querschnitts in der Höhe y, so ist das Gesamtgewicht

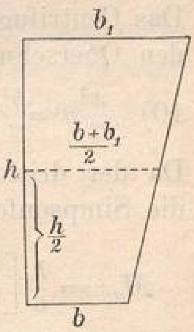
$$5)\qquad \overset{h}{\underset{0}{P}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

165) Beispiel des Trapezes.

Der Querschnitt in Höhe y ist für das nebenstehende Trapez

$$1)\qquad x = b + \frac{b_1 - b}{h}\, y,$$

Fig. 132b.



wie sich aus der Zerlegung in Parallelogramm (Rechteck) und Dreieck ergiebt.

Das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die Grundlinie ist

$$2)\qquad xy = by + \frac{b_1 - b}{h}\, y^2,$$

das entsprechende Trägheitsmoment

$$3)\qquad xy^2 = by^2 + \frac{b_1 - b}{h}\, y^3.$$

Da keine dieser Querschnittsformeln den dritten Grad übersteigt, so darf auf sämtliche die Simpsonsche Formel angewandt werden. Die Fläche wird nach 1)

4) $$F = \frac{h}{6}\left[b + b_1 + 4\frac{b+b_1}{2}\right] = \frac{h}{6}[3b + 3b_1] = \frac{h}{2}(b + b_1).$$

Das statische Moment wird

5) $$M_u = \frac{h}{6}\left[b \cdot 0 + b_1 h + 4\frac{b+b_1}{2}\frac{h}{2}\right] = \frac{h^2}{6}[b_1 + (b+b_1)] = \frac{h^2}{6}(b+2b_1).$$

Das Trägheitsmoment der Fläche wird

6) $$T_u = \frac{h}{6}\left[b \cdot 0^2 + b_1 h^2 + 4\frac{b+b_1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{h^3}{6}\left[b_1 + \frac{b+b_1}{2}\right] = \frac{h^3}{12}[b+3b_1].$$

Daraus ergiebt sich die Schwerpunktshöhe

7) $$h_s = \frac{M_u}{F} = \frac{h(b+2b_1)}{3(b+b_1)},$$

der Trägheitsradius in Bezug auf die X-Achse

8) $$\varrho_x = \sqrt{\frac{T_u}{F}} = h\sqrt{\frac{b+3b}{6(b+b_1)}},$$

die Höhe des Schwingungspunktes bei Drehung um dieselbe Achse

9) $$h_m = \frac{T_u}{M_u} = \frac{h(b+3b_1)}{2(b+2b_1)}.$$

Einfacher würde die Summenformel aus 1) geben:

$$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{bh}{1} + \frac{b_1 - b}{h}\frac{h^2}{2} = h\frac{b+b_1}{2}.$$

Aus 2) würde folgen

$$M_u = \frac{bh^2}{2} + \frac{b_1 - b}{h}\frac{h^3}{3} = \frac{h^2}{6}(b + 2b_1).$$

Aus 3) erhält man

$$T_u = \frac{bh^3}{3} + \frac{b_1 - b}{h}\frac{h^4}{4} = \frac{h^3}{12}(b + 3b_1).$$

Das Centrifugalmoment in Bezug auf die Geraden b und h würde für den Querschnitt werden

10) $$\frac{x^2}{2}y = \frac{b^2}{2}y + 2\frac{b_1-b}{h}\frac{by^2}{2} + \frac{(b_1-b)^2}{h^2}\frac{y^3}{2} = \frac{b^2}{2}y + \frac{bb_1 - b^2}{h}y^2 + \frac{(b_1-b)^2}{h^2}\frac{y^3}{2}.$$

Da der dritte Grad nicht überstiegen wird, ließe sich auch hierauf die Simpsonformel anwenden. Sie würde geben

$$M_{xy} = \frac{h}{6}\left[\frac{b^2}{2}0 + \frac{b_1^2}{2}h + \frac{4}{2}\left(\frac{b+b_1}{2}\right)^2\frac{h}{2}\right] = \frac{h}{6}\left[\frac{b_1^2}{2}h + \frac{(b+b_1)^2 h}{4}\right]$$
$$= \frac{h^2}{24}\left[2b_1^2 + b^2 + 2bb_1 + b_1^2\right]$$

oder

11) $$M_{xy} = \frac{h^2}{24}\left[b^2 + 2bb_1 + 3b_1^2\right].$$

Die Schichtenformel würde geben

$$\frac{b^2}{2}\frac{h^2}{2}+\frac{bb_1-b^2}{h}\frac{h^3}{3}+\frac{(b_1-b)^2}{h^2}\frac{h^4}{2\cdot 4}=\frac{h^2}{24}\left[6b^2+8bb_1-8b^2+3b_1^2+3b^2-6bb_1\right]$$

oder

$$M_{xy}=\frac{h^2}{24}\left[b^2+2bb_1+3b_1^2\right].$$

166) Beispiel der Parabel $x=\frac{cy^2}{h^2}$.

Das statische Moment und das Trägheitsmoment des Querschnitts würde für die Grundfläche werden $\frac{cy^3}{h^2}$, $\frac{cy^4}{h^2}$, das Centrifugalmoment würde sein $\frac{x^2}{2}y=\frac{c^2y^4}{h^4}\frac{y}{2}=\frac{c^2y^5}{2h^4}$. Die Simpsonsche Regel ist also hier nur für die Berechnung der Fläche und des statischen Momentes zu gebrauchen, denn alles Übrige übersteigt den dritten Grad. Das Resultat würde werden

$$F=\frac{h}{6}\left[0+c+4\frac{c}{4}\right]=\frac{2}{3}ch;\quad M_u=\frac{h}{6}\left[0\cdot 0+ch+4\frac{c}{4}\frac{h}{2}\right]=\frac{ch^2}{4}.$$

Die übrigen Dinge können erst im Abschnitt B behandelt werden.

167) Die Gleichung einer Kurve sei

$$x^2=a+by+cy^2+dy^3.$$

Der durch Drehung um die Y-Achse aus ihr entstehende Körper hat die Querschnittsformel

$$q_y=x^2\pi=a\pi+b\pi y+c\pi y^2+d\pi y^3.$$

Da der dritte Grad nicht überstiegen wird, kann sowohl die Simpsonsche Regel als auch die Summenformel angewandt werden. Der Inhalt wird

$$J=\pi\left[\frac{ah}{1}+\frac{bh^2}{2}+\frac{ch^3}{3}+\frac{dh^4}{4}\right].$$

Im besonderen Falle $x^2=dy^3$ handelt es sich um die sogenannte semikubische oder Neilsche Parabel. Die allgemeinere Curve wird bisweilen als Neiloide bezeichnet, während andere den entsprechenden Drehungskörper mit dem Namen Neiloid belegen.

168) Ist die Gleichung von der Form

$$x^2=a+by+cy^2,$$

so erhält der Drehungskörper den Inhalt

$$J=\pi\left[\frac{ah}{1}+\frac{bh^2}{2}+\frac{ch^3}{3}\right].$$

Der Querschnitt hat in Bezug auf die Grundfläche das statische Moment

$$x^2 y = \pi(ay + by^2 + cy^3),$$

demnach ist die Simpsonsche Regel anwendbar auf die Berechnung des statischen Momentes

$$M_u = \pi\left(\frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4}\right).$$

Ist endlich die Curvengleichung von der Form

$$x^2 = a + by,$$

so läfst sich auch das Trägheitsmoment T_u des Drehungskörpers mit Hülfe jener Regel berechnen. Die Resultate werden

$$J = \pi\left(\frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2}\right), \quad M_u = \pi\left(\frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3}\right), \quad T_u = \pi\left(\frac{ah}{3} + \frac{bh^4}{4}\right).$$

Die angegebenen Beschränkungen, die z. B. die Anwendung auf das Trägheitsmoment der Kugel ausschliefsen, lassen die Ausdehnung der Schichtenformel auf höhere Potenzen als wünschenswert erscheinen. Diese soll in Abschnitt B. durchgeführt werden.

169) Noch sei darauf aufmerksam gemacht, dafs bei der Curvengleichung $x = \frac{1}{y}$ das statische Moment des Querschnitts

$$xy = \frac{1}{y} y = 1,$$

sein Trägheitsmoment $xy^2 = \frac{1}{y} y^2 = y$ wird, so dafs sich für die beiden letzten die Simpsonsche Regel anwenden läfst. Bei der Gleichung $x = \frac{1}{y^2}$, die dem Gravitationsgesetze entspricht, ist das Trägheitsmoment des Querschnitts der Diagrammkurve

$$xy^2 = \frac{1}{y^2} \cdot y^2 = 1$$

der entsprechenden Behandlung zugänglich.

170) Eine weitere Deutung ergiebt sich folgendermafsen:

Die Gleichung einer Kurve sei

$$x = k + \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4}.$$

In der Höhe y hat sie eine Tangente, die gegen die Y-Achse eine gewisse Neigung α hat. Diese berechnet sich nach dem Anhange von Teil 3 des Methodischen Lehrbuchs Seite 132 nach der Formel

$$\tan\alpha = a + \frac{2by}{2} + \frac{3cy^2}{3} + \frac{4dy^3}{4}$$

oder nach

$$\tan\alpha = a + by + cy^2 + dy^3.$$

Folglich: Deutet man die Gleichung

1) $$q = a + by + cy^2 + dy^3$$

als die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels, den die geometrische Tangente einer gewissen Kurve in der Höhe y genommen gegen die Y-Achse hat, so ist die Gleichung der Kurve

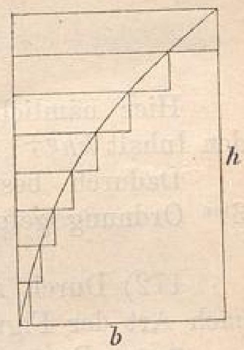
$$x = \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4}.$$

Hierzu kann aber noch eine Konstante k kommen, deren Gröfse nur von der Wahl des Niveaus für die X-Achse abhängt, die also für die Gestalt der Kurve ohne Bedeutung ist.

B. Die Schichtenformel für ganze positive Exponenten von beliebiger Gröfse.

171) Figur 133 stelle eine Parabel ganzzahliger Ordnung dar, die einem Rechteck mit den Seiten b und h einbeschrieben ist. Ihre Gleichung sei

Fig. 133.



$$x = \frac{b}{h^p} y^p,$$

was für $y = 0$ den Querschnitt 0, für $x = h$ den Querschnitt

$$\frac{b}{h^p} h^p = b$$

giebt, wie es nach der Figur auch sein mufs.

Man denke sich die Höhe h in n gleiche Teile zerlegt und durch die Teilpunkte Parallele gelegt. Die Streifen mögen, wie in der Figur, zu Rechtecken ergänzt werden. Jedes dieser Rechtecke hat die Höhe $\frac{h}{n}$, die Grundlinien aber sind nach der Formel $x = \frac{b}{h^p} y^p$ der Reihe nach

$$\frac{b}{h^p}\left(\frac{h}{n}\right)^p, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{2h}{n}\right)^p, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{3h}{n}\right)^p, \quad \ldots, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{nh}{n}\right)^p$$

oder

$$\frac{1^p}{n^p} b, \quad \frac{2^p}{n^p} b, \quad \frac{3^p}{n^p} b, \quad \ldots, \quad \frac{n^p}{n^p} b,$$

so dafs die Summe der Rechtecksinhalte wird