Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Anwendungen auf Mechanik.

164) Die Formeln lassen aber noch anderweitige Deutungen zu. Ist

1) $$q = a + by + cy^2 + dy^3$$

das statische Moment des Flächen- oder Körperquerschnitts in Bezug auf die Basis, so ist

2) $$\overset{h}{\underset{0}{M}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

das gesamte statische Moment der Fläche, von 0 bis h genommen.

Ist 1) die Formel für das Trägheitsmoment der Fläche oder des Körpers in Bezug auf die Basis, so ist

3) $$\overset{h}{\underset{0}{T}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

das gesamte Trägheitsmoment in Bezug auf die Basis.

Ist 1) die Formel für den Querschnitt des Arbeitsdiagramms, bedeutet es also die Gröſse der Kraft an der Stelle y, so ist

4) $$\overset{h}{\underset{0}{A}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

die gesamte Arbeit längs des Weges 0 bis h.

Ist 1) das Gewicht des Querschnitts in der Höhe y, so ist das Gesamtgewicht

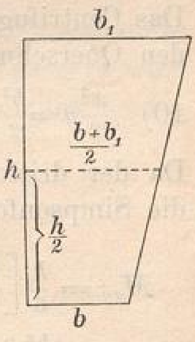
5) $$\overset{h}{\underset{0}{P}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}.$$

165) Beispiel des Trapezes.

Der Querschnitt in Höhe y ist für das nebenstehende Trapez

1) $$x = b + \frac{b_1 - b}{h} y,$$

Fig. 132b.



wie sich aus der Zerlegung in Parallelogramm (Rechteck) und Dreieck ergiebt.

Das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die Grundlinie ist

2) $$xy = by + \frac{b_1 - b}{h} y^2,$$

das entsprechende Trägheitsmoment

3) $$xy^2 = by^2 + \frac{b_1 - b}{h} y^3.$$

Da keine dieser Querschnittsformeln den dritten Grad übersteigt, so darf auf sämtliche die Simpsonsche Formel angewandt werden. Die Fläche wird nach 1)

$$4)\quad F = \frac{h}{6}\left[b + b_1 + 4\,\frac{b + b_1}{2}\right] = \frac{h}{6}\,[3b + 3b_1] = \frac{h}{2}\,(b + b_1).$$

Das statische Moment wird

$$5)\quad M_u = \frac{h}{6}\left[b \cdot 0 + b_1 h + 4\,\frac{b+b_1}{2}\,\frac{h}{2}\right] = \frac{h^2}{6}\,[b_1 + (b+b_1)] = \frac{h^2}{6}\,(b+2b_1).$$

Das Trägheitsmoment der Fläche wird

$$6)\quad T_u = \frac{h}{6}\left[b \cdot 0^2 + b_1 h^2 + 4\,\frac{b+b_1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{h^3}{6}\left[b_1 + \frac{b+b_1}{2}\right] = \frac{h^3}{12}\,[b+3b_1].$$

Daraus ergiebt sich die Schwerpunktshöhe

$$7)\qquad h_s = \frac{M_u}{F} = \frac{h\,(b + 2b_1)}{3\,(b + b_1)},$$

der Trägheitsradius in Bezug auf die X-Achse

$$8)\qquad \varrho_x = \sqrt{\frac{T_u}{F}} = h\sqrt{\frac{b + 3b}{6\,(b + b_1)}},$$

die Höhe des Schwingungspunktes bei Drehung um dieselbe Achse

$$9)\qquad h_m = \frac{T_u}{M_u} = \frac{h\,(b + 3b_1)}{2\,(b + 2b_1)}.$$

Einfacher würde die Summenformel aus 1) geben:

$$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{bh}{1} + \frac{b_1 - b}{h}\,\frac{h^2}{2} = h\,\frac{b + b_1}{2}.$$

Aus 2) würde folgen

$$M_u = \frac{bh^2}{2} + \frac{b_1 - b}{h}\,\frac{h^3}{3} = \frac{h^2}{6}\,(b + 2b_1).$$

Aus 3) erhält man

$$T_u = \frac{bh^3}{3} + \frac{b_1 - b}{h}\,\frac{h^4}{4} = \frac{h^3}{12}\,(b + 3b_1).$$

Das Centrifugalmoment in Bezug auf die Geraden b und h würde für den Querschnitt werden

$$10)\quad \frac{x^2}{2}\,y = \frac{b^2}{2}\,y + 2\,\frac{b_1 - b}{h}\,\frac{b\,y^2}{2} + \frac{(b_1 - b)^2}{h^2}\,\frac{y^3}{2} = \frac{b^2}{2}\,y + \frac{bb_1 - b^2}{h}\,y^2 + \frac{(b_1 - b)^2}{h^2}\,\frac{y^3}{2}.$$

Da der dritte Grad nicht überstiegen wird, ließe sich auch hierauf die Simpsonformel anwenden. Sie würde geben

$$M_{xy} = \frac{h}{6}\left[\frac{b^2}{2}\,0 + \frac{b_1^2}{2}\,h + \frac{4}{2}\left(\frac{b + b_1}{2}\right)^2 \frac{h}{2}\right] = \frac{h}{6}\left[\frac{b_1^2}{2}\,h + \frac{(b + b_1)^2\,h}{4}\right]$$

$$= \frac{h^2}{24}\left[2b_1^2 + b^2 + 2bb_1 + b_1^2\right]$$

oder

$$11)\qquad M_{xy} = \frac{h^2}{24}\left[b^2 + 2bb_1 + 3b_1^2\right].$$