Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Beispiel des Trapezes, der Parabeln zweiter und höherer Ordnung.

4) $$F = \frac{h}{6}\left[b + b_1 + 4\,\frac{b + b_1}{2}\right] = \frac{h}{6}\,[3\,b + 3\,b_1] = \frac{h}{2}\,(b + b_1).$$

Das statische Moment wird

5) $$M_u = \frac{h}{6}\left[b \cdot 0 + b_1 h + 4\,\frac{b + b_1}{2}\,\frac{h}{2}\right] = \frac{h^2}{6}\,[b_1 + (b + b_1)] = \frac{h^2}{6}\,(b + 2\,b_1).$$

Das Trägheitsmoment der Fläche wird

6) $$T_u = \frac{h}{6}\left[b \cdot 0^2 + b_1 h^2 + 4\,\frac{b + b_1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{h^3}{6}\left[b_1 + \frac{b + b_1}{2}\right] = \frac{h^3}{12}\,[b + 3\,b_1].$$

Daraus ergiebt sich die Schwerpunktshöhe

7) $$h_s = \frac{M_u}{F} = \frac{h\,(b + 2\,b_1)}{3\,(b + b_1)},$$

der Trägheitsradius in Bezug auf die X-Achse

8) $$\varrho_x = \sqrt{\frac{T_u}{F}} = h\sqrt{\frac{b + 3\,b}{6\,(b + b_1)}},$$

die Höhe des Schwingungspunktes bei Drehung um dieselbe Achse

9) $$h_m = \frac{T_u}{M_u} = \frac{h\,(b + 3\,b_1)}{2\,(b + 2\,b_1)}.$$

Einfacher würde die Summenformel aus 1) geben:

$$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{b\,h}{1} + \frac{b_1 - b}{h}\,\frac{h^2}{2} = h\,\frac{b + b_1}{2}.$$

Aus 2) würde folgen

$$M_u = \frac{b\,h^2}{2} + \frac{b_1 - b}{h}\,\frac{h^3}{3} = \frac{h^2}{6}\,(b + 2\,b_1).$$

Aus 3) erhält man

$$T_u = \frac{b\,h^3}{3} + \frac{b_1 - b}{h}\,\frac{h^4}{4} = \frac{h^3}{12}\,(b + 3\,b_1).$$

Das Centrifugalmoment in Bezug auf die Geraden b und h würde für den Querschnitt werden

10) $$\frac{x^2}{2}\,y = \frac{b^2}{2}\,y + 2\,\frac{b_1 - b}{h}\,\frac{b\,y^2}{2} + \frac{(b_1 - b)^2}{h^2}\,\frac{y^3}{2} = \frac{b^2}{2}\,y + \frac{b\,b_1 - b^2}{h}\,y^2 + \frac{(b_1 - b)^2}{h^2}\,\frac{y^3}{2}.$$

Da der dritte Grad nicht überstiegen wird, ließe sich auch hierauf die Simpsonformel anwenden. Sie würde geben

$$M_{xy} = \frac{h}{6}\left[\frac{b^2}{2}\,0 + \frac{b_1^2}{2}\,h + \frac{4}{2}\left(\frac{b + b_1}{2}\right)^2\frac{h}{2}\right] = \frac{h}{6}\left[\frac{b_1^2}{2}\,h + \frac{(b + b_1)^2\,h}{4}\right]$$

$$= \frac{h^2}{24}\left[2\,b_1^2 + b^2 + 2\,b\,b_1 + b_1^2\right]$$

oder

11) $$M_{xy} = \frac{h^2}{24}\left[b^2 + 2\,b\,b_1 + 3\,b_1^2\right].$$

Die Schichtenformel würde geben

$$\frac{b^2 h^2}{2\ 2} + \frac{bb_1 - b^2}{h}\frac{h^3}{3} + \frac{(b_1 - b)^2}{h^2}\frac{h^4}{2 \cdot 4} = \frac{h^2}{24}\left[6b^2 + 8bb_1 - 8b^2 + 3b_1^2 + 3b^2 - 6bb_1\right]$$

oder

$$M_{xy} = \frac{h^2}{24}\left[b^2 + 2bb_1 + 3b_1^2\right].$$

166) Beispiel der Parabel $x = \frac{cy^2}{h^2}$.

Das statische Moment und das Trägheitsmoment des Querschnitts würde für die Grundfläche werden $\frac{cy^3}{h^2}$, $\frac{cy^4}{h^2}$, das Centrifugalmoment würde sein $\frac{x^2}{2}y = \frac{c^2y^4}{h^4}\frac{y}{2} = \frac{c^2y^5}{2h^4}$. Die Simpsonsche Regel ist also hier nur für die Berechnung der Fläche und des statischen Momentes zu gebrauchen, denn alles Übrige übersteigt den dritten Grad. Das Resultat würde werden

$$F = \frac{h}{6}\left[0 + c + 4\frac{c}{4}\right] = \frac{2}{3}ch; \quad M_u = \frac{h}{6}\left[0 \cdot 0 + ch + 4\frac{c}{4}\frac{h}{2}\right] = \frac{ch^2}{4}.$$

Die übrigen Dinge können erst im Abschnitt B behandelt werden.

167) Die Gleichung einer Kurve sei

$$x^2 = a + by + cy^2 + dy^3.$$

Der durch Drehung um die Y-Achse aus ihr entstehende Körper hat die Querschnittsformel

$$q_y = x^2\pi = a\pi + b\pi y + c\pi y^2 + d\pi y^3.$$

Da der dritte Grad nicht überstiegen wird, kann sowohl die Simpsonsche Regel als auch die Summenformel angewandt werden. Der Inhalt wird

$$J = \pi\left[\frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}\right].$$

Im besonderen Falle $x^2 = dy^3$ handelt es sich um die sogenannte semikubische oder Neilsche Parabel. Die allgemeinere Curve wird bisweilen als Neiloide bezeichnet, während andere den entsprechenden Drehungskörper mit dem Namen Neiloid belegen.

168) Ist die Gleichung von der Form

$$x^2 = a + by + cy^2,$$

so erhält der Drehungskörper den Inhalt

$$J = \pi\left[\frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3}\right].$$

Der Querschnitt hat in Bezug auf die Grundfläche das statische Moment

$$x^2 y = \pi(ay + by^2 + cy^3),$$

demnach ist die Simpsonsche Regel anwendbar auf die Berechnung des statischen Momentes

$$M_u = \pi\left(\frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3} + \frac{ch^4}{4}\right).$$

Ist endlich die Curvengleichung von der Form

$$x^2 = a + by,$$

so läſst sich auch das Trägheitsmoment T_u des Drehungskörpers mit Hülfe jener Regel berechnen. Die Resultate werden

$$J = \pi\left(\frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2}\right), \quad M_u = \pi\left(\frac{ah^2}{2} + \frac{bh^3}{3}\right), \quad T_u = \pi\left(\frac{ah}{3} + \frac{bh^4}{4}\right).$$

Die angegebenen Beschränkungen, die z. B. die Anwendung auf das Trägheitsmoment der Kugel ausschlieſsen, lassen die Ausdehnung der Schichtenformel auf höhere Potenzen als wünschenswert erscheinen. Diese soll in Abschnitt B. durchgeführt werden.

169) Noch sei darauf aufmerksam gemacht, daſs bei der Curvengleichung $x = \frac{1}{y}$ das statische Moment des Querschnitts

$$xy = \frac{1}{y} y = 1,$$

sein Trägheitsmoment $xy^2 = \frac{1}{y} y^2 = y$ wird, so daſs sich für die beiden letzten die Simpsonsche Regel anwenden läſst. Bei der Gleichung $x = \frac{1}{y^2}$, die dem Gravitationsgesetze entspricht, ist das Trägheitsmoment des Querschnitts der Diagrammkurve

$$xy^2 = \frac{1}{y^2} \cdot y^2 = 1$$

der entsprechenden Behandlung zugänglich.

170) Eine weitere Deutung ergiebt sich folgendermaſsen:

Die Gleichung einer Kurve sei

$$x = k + \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4}.$$

In der Höhe y hat sie eine Tangente, die gegen die Y-Achse eine gewisse Neigung α hat. Diese berechnet sich nach dem Anhange von Teil 3 des Methodischen Lehrbuchs Seite 132 nach der Formel

$$\tan \alpha = a + \frac{2\,by}{2} + \frac{3\,cy^2}{3} + \frac{4\,dy^3}{4}$$

oder nach

$$\tan\alpha = a + by + cy^2 + dy^3.$$

Folglich: Deutet man die Gleichung

$$1) \qquad q = a + by + cy^2 + dy^3$$

als die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels, den die geometrische Tangente einer gewissen Kurve in der Höhe y genommen gegen die Y-Achse hat, so ist die Gleichung der Kurve

$$x = \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4}.$$

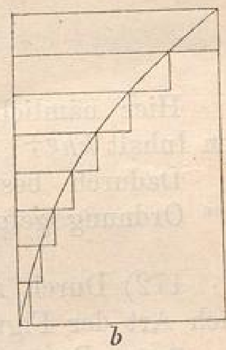
Hierzu kann aber noch eine Konstante k kommen, deren Gröfse nur von der Wahl des Niveaus für die X-Achse abhängt, die also für die Gestalt der Kurve ohne Bedeutung ist.

B. Die Schichtenformel für ganze positive Exponenten von beliebiger Gröfse.

171) Figur 133 stelle eine Parabel ganzzahliger Ordnung dar, die einem Rechteck mit den Seiten b und h einbeschrieben ist. Ihre Gleichung sei

$$x = \frac{b}{h^p}\, y^p,$$

Fig. 133.



was für $y = 0$ den Querschnitt 0, für $x = h$ den Querschnitt

$$\frac{b}{h^p}\, h^p = b$$

giebt, wie es nach der Figur auch sein mufs.

Man denke sich die Höhe h in n gleiche Teile zerlegt und durch die Teilpunkte Parallele gelegt. Die Streifen mögen, wie in der Figur, zu Rechtecken ergänzt werden. Jedes dieser Rechtecke hat die Höhe $\frac{h}{n}$, die Grundlinien aber sind nach der Formel $x = \frac{b}{h^p} y^p$ der Reihe nach

$$\frac{b}{h^p}\left(\frac{h}{n}\right)^p, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{2h}{n}\right)^p, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{3h}{n}\right)^p, \quad \ldots, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{nh}{n}\right)^p$$

oder

$$\frac{1^p}{n^p} b, \quad \frac{2^p}{n^p} b, \quad \frac{3^p}{n^p} b, \quad \ldots, \quad \frac{n^p}{n^p} b,$$

so dafs die Summe der Rechtecksinhalte wird