Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

B. Schichtenformel für ganze positive Exponenten von beliebiger Grösse.

oder nach

$$\tan\alpha = a + by + cy^2 + dy^3.$$

Folglich: Deutet man die Gleichung

1) $$q = a + by + cy^2 + dy^3$$

als die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels, den die geometrische Tangente einer gewissen Kurve in der Höhe y genommen gegen die Y-Achse hat, so ist die Gleichung der Kurve

$$x = \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4}.$$

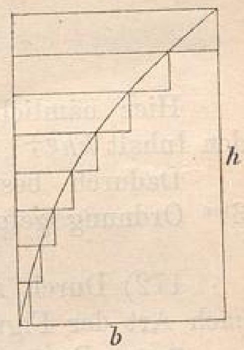
Hierzu kann aber noch eine Konstante k kommen, deren Gröfse nur von der Wahl des Niveaus für die X-Achse abhängt, die also für die Gestalt der Kurve ohne Bedeutung ist.

B. Die Schichtenformel für ganze positive Exponenten von beliebiger Gröfse.

171) Figur 133 stelle eine Parabel ganzzahliger Ordnung dar, die einem Rechteck mit den Seiten b und h einbeschrieben ist. Ihre Gleichung sei

$$x = \frac{b}{h^p}\, y^p,$$

Fig. 133.



was für $y = 0$ den Querschnitt 0, für $x = h$ den Querschnitt

$$\frac{b}{h^p}\, h^p = b$$

giebt, wie es nach der Figur auch sein mufs.

Man denke sich die Höhe h in n gleiche Teile zerlegt und durch die Teilpunkte Parallele gelegt. Die Streifen mögen, wie in der Figur, zu Rechtecken ergänzt werden. Jedes dieser Rechtecke hat die Höhe $\frac{h}{n}$, die Grundlinien aber sind nach der Formel $x = \frac{b}{h^p} y^p$ der Reihe nach

$$\frac{b}{h^p}\left(\frac{h}{n}\right)^p, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{2h}{n}\right)^p, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{3h}{n}\right)^p, \quad \ldots, \quad \frac{b}{h^p}\left(\frac{nh}{n}\right)^p$$

oder

$$\frac{1^p}{n^p} b, \quad \frac{2^p}{n^p} b, \quad \frac{3^p}{n^p} b, \quad \ldots, \quad \frac{n^p}{n^p} b,$$

so dafs die Summe der Rechtecksinhalte wird

$$\frac{h}{n}\frac{1^p}{n^p}b + \frac{h}{n}\frac{2^p}{n^p}b + \frac{h}{n}\frac{3^p}{n^p}b + \cdots + \frac{h}{n}\frac{n^p}{n^p}b$$

oder

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}\,bh.$$

Macht man nun n unendlich grofs, die Höhe der Streifen also unendlich klein, so fallen erstens die störenden Treppenräume weg, zweitens wird nach Band II des Methodischen Lehrbuchs, Arithm. Nr. 38,

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} \qquad \text{für } n = \infty$$

und demnach wird die schraffierte Fläche von der Höhe 0 bis zur Höhe h

$$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{bh}{p+1}.$$

Also: Die Parabel p^{ter} Ordnung $x = \frac{b}{h^p}y^p$ schneidet von dem zugehörigen Rechteck den $(p+1)^{\text{ten}}$ Teil, d. h. die Fläche $\frac{bh}{p+1}$ ab.

Folglich: Die Parabel p^{ter} Ordnung $x = ky^p$ hat von der Höhe 0 bis zur Höhe h den Inhalt

$$\overset{h}{\underset{0}{F}} = k\frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

Hier nämlich würde das Rechteck die Seiten h und kh^p, also den Inhalt kh^{p+1} haben, von dem der $(p+1)^{\text{te}}$ Teil abgeschnitten ist.

Dadurch bestätigen sich zunächst die schon vorher bis zur 3^{ten} Ordnung gefundenen Resultate.

172) Durch Aneinandersetzen der Streifen parabolischer Flächen nach Art der Figur 132 erhält man folgende allgemeine Sätze:

Satz: Berechnet sich die Querlinie einer ebenen Fläche für jede Höhe y nach der Formel

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots + ky^p,$$

so ist ihr Inhalt, von der Höhe $y = 0$ bis zur Höhe $y = h$ gerechnet,

$$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \cdots + k\frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

Satz: Berechnet sich die Querschnittsfläche eines Körpers für jede Höhe y nach der Formel

$$q = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots + ky^p$$

so ist sein Inhalt, von der Höhe $y = 0$ bis zur Höhe $y = h$ gerechnet,

$$\overset{h}{\underset{0}{J}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \cdots + k\,\frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

173) Durch diese Formel wird ein Bereich beherrscht, der weit über den der Simpsonschen Regel hinausgeht. Die Zahl der Glieder darf unter gewissen Bedingungen sogar bis ins Unendliche gehen.

Ist z. B. der Querschnitt durch folgende unendliche Reihe dargestellt

1) $$q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots \text{ in infinitum},$$

so folgt daraus

2) $$\overset{h}{\underset{0}{J}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \frac{eh^5}{5} + \cdots \text{ in infinitum},$$

nur mufs der Konvergenzbereich beider Reihen eingehalten werden.

Die Formeln können auf alle Funktionen angewandt werden, die sich in konvergenten Potenzreihen entwickeln lassen.

Dies gilt z. B. von der geometrischen Reihe, also von der Kurve

$$x = \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots \qquad \text{für } y \text{ absolut } < 1,$$

von der Exponentialreihe, also von der logarithmischen Linie

$$x = e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots,$$

und zwar für jedes y; ferner von der logarithmischen Linie

$$x = {}^e\lg y = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \cdots \qquad \text{für } y \text{ absolut } < 1,$$

von der Kettenlinie

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = 1 + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{y^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots,$$

von der Sinuskurve

$$x = \sin y = \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots,$$

von Kurven, deren Gleichung mit dem binomischen Lehrsatze zusammenhängt, wie

$$x = \sqrt{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{2}}$$

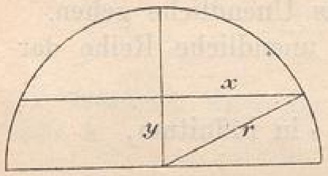
$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}y + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + \cdots$$

für y absolut < 1.

Diese Bemerkungen mögen vorläufig hinreichen, von der weitgehenden Bedeutung des Verfahrens ein Bild zu geben, denn die obigen Deutungen bleiben hier sämtlich erhalten. Einige Beispiele werden die Sache näher erläutern.

174) Anwendungen auf die Halbkugel und die ganze Kugel.

Fig. 134.



a) Inhaltsberechnung. Der Schnitt in Höhe y ist

$$q = x^2\pi = (r^2 - y^2)\,\pi = r^2\pi - y^2\pi\,.$$

Folglich: Inhalt der Schicht von 0 bis y_1 ist

$$\overset{h_1}{\underset{0}{J}} = \frac{r^2\pi y_1}{1} - \frac{\pi y_1^3}{3} = \frac{y_1\pi}{3}\left(r^2 - y_1^2\right),$$

Inhalt der Halbkugel

$$\overset{r}{\underset{0}{J}} = r^2\pi\,\frac{r_1}{1} - \pi\,\frac{r_1^3}{3} = \tfrac{2}{3}\,r^3\pi\,.$$

b) Das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche. Die in Höhe y befindliche Schicht hatte die Fläche $x^2\pi$, die Multiplikation mit dem Abstande y giebt $x^2y\pi$ oder $(r^2 - y^2)\,y\pi = r^2\pi y - y^3\pi$. Aus

$$q = r^2\pi y - y^3\pi$$

folgt als statisches Moment der Schicht von 0 bis y_1

$$\overset{y_1}{\underset{0}{M}} = r^2\pi\,\frac{y_1^2}{2} - \pi\,\frac{y_1^4}{4} = \frac{y_1^2\pi}{4}\left(2\,r^2 - y_1^2\right).$$

Das statische Moment der Halbkugel für die Grundfläche ist

$$\overset{r}{\underset{0}{M}} = r^2\pi\,\frac{r^2}{2} - \pi\,\frac{r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{4}\cdot$$

c) Schwerpunktshöhe.

Die Schwerpunktshöhe der Schicht ist

$$h_s = \frac{\overset{y_1}{\underset{0}{M}}}{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}} = \frac{\frac{y_1^2\pi}{4}\left(2\,r^2 - y_1^2\right)}{\frac{y_1\pi}{3}\left(r^2 - y_1^2\right)} = \frac{3\,y_1}{4}\,\frac{2\,r^2 - y_1^2}{r^2 - y_1^2}\,.$$

die Schwerpunktshöhe der Halbkugel

$$h_s = \frac{\overset{r}{\underset{0}{M}}}{\overset{r}{\underset{0}{J}}} = \frac{\frac{r^4\pi}{4}}{\frac{2}{3}\,r^3\pi} = \tfrac{3}{8}\,r\,.$$

d) Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche. Die Schicht in Höhe y ist mit y^2 zu multiplizieren, wenn man ihr Trägheitsmoment für die Grundfläche erhalten will. Dies giebt

$$q_y = x^2 \pi y^2 = (r^2 - y^2)\,\pi y^2 = r^2 \pi y^2 - \pi y^4.$$

Das Trägheitsmoment für die Schichten von 0 bis y_1 wird also

$$\overset{y_1}{\underset{0}{T}} = r^2 \pi \frac{y_1^3}{3} - \pi \frac{y_1^5}{5} = \frac{y_1^3 \pi}{15} \left(5 r^2 - 3 y_1^2\right).$$

Für die Halbkugel selbst wird es

$$\overset{r}{\underset{0}{T}} = r^2 \pi \frac{r^3}{3} - \pi \frac{r^5}{5} = \tfrac{2}{15} r^5 \pi.$$

e) Der entsprechende Trägheitsradius. Er bestimmt sich aus der Formel $y_t^2 J = T$, also wird er für die Schichten von 0 bis y_1

$$y_t = \sqrt{\frac{\overset{y_1}{\underset{0}{T}}}{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}}} = \sqrt{\frac{\frac{y_1^3 \pi}{15}\left(5 r^2 - 3 y_1^2\right)}{\frac{y_1 \pi}{3}\left(r^2 - y_1^2\right)}} = \sqrt{\frac{3 y_1^2 \left(5 r^2 - 3 y_1^2\right)}{15 \left(r^2 - y_1^2\right)}},$$

für die Halbkugel

$$y_t = \sqrt{\frac{\frac{2}{15} r^5 \pi}{\frac{2}{3} r^3 \pi}} = r \sqrt{\tfrac{1}{5}}.$$

e) Das Trägheitsmoment der ganzen Kugel in Bezug auf einen Hauptschnitt ist

$$T = \tfrac{4}{15} r^5 \pi.$$

f) Das axiale Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf einen Durchmesser ist gleich der Summe zweier planen Trägheitsmomente (in Bezug auf zwei auf einander senkrechte Hauptschnitte), also

$$T_a = \tfrac{8}{15} r^5 \pi = \left(\tfrac{4}{3} r^3 \pi\right) \frac{2 r^2}{5} = \frac{2 r^2}{5} m,$$

wo m die Masse der Kugel bedeutet.

g) Der axiale Trägheitsradius wird

$$r_t = \sqrt{\frac{T_a}{J}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{15} r^5 \pi}{\frac{4}{3} r^3 \pi}} = r \sqrt{\tfrac{2}{5}}.$$

h) Die Energie der homogenen sich drehenden Kugel ist

$$E = \frac{T \vartheta^2}{2} = \frac{2 r^2}{5} m \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{m r^2 \vartheta^2}{5},$$

wo m die Masse, ϑ die am Radius 1 gemessene Winkelgeschwindigkeit ist. Für den Erdball z. B. ist $T = \frac{8\,r^5 \pi}{15} \frac{p'}{g}$, wo das spezifische Gewicht $p' = 5{,}6$, $g = 9{,}81$ m und $r = 860 \cdot 7500$ m angenommen werden kann. Die Umdrehungszeit ist 86 164 Sekunden (Sterntag, nicht Sonnentag von 86 400 Sek.), die Winkelgeschwindigkeit also $\vartheta = \frac{2\pi}{86\,164}$. Die Drehungsenergie ist daher $\frac{1}{2} \frac{8\,r^5 \pi}{15} \frac{5{,}6}{9{,}81} \left(\frac{2\pi}{86\,164}\right)^2 = 28\,388 \cdot 10^{21}$ Metertonnen $= 28\,388 \cdot 10^{24}$ mkg. Division durch 425 giebt die in dieser Energie enthaltene Anzahl von Wärmeeinheiten, nämlich $66\,797 \cdot 10^{21}$ W.-E. Angenommen, der Sterntag wäre jetzt $\frac{1}{81}$ Sekunde länger als vor 2000 Jahren, so wäre die frühere Winkelgeschwindigkeit gewesen $\vartheta_1 = \frac{2\pi}{86\,163\frac{80}{81}} = \frac{6\,979\,284}{6\,979\,283}\,\vartheta$*), der Energieverlust also

$$28\,388 \cdot 10^{24} \frac{6\,979\,284^2 - 6\,979\,283^2}{6\,979\,283^2} = 81\,349 \cdot 10^{17} \text{ mkg.}$$

Man kann den mittleren Energieverlust innerhalb der 2000 Jahre auf die Sekunde reduzieren, indem man abgerundet durch $2000 \cdot 365{,}25 \cdot 86\,400$ dividiert. Er beträgt auf die Sekunde $12\,918 \cdot 10^7$ mkg. Division durch 75 giebt $17\,225 \cdot 10^5$ Pferdestärken, mit denen unter jener bekannten Annahme an der Verlangsamung der Erddrehung gearbeitet wird, und zwar besonders durch den Einfluſs der Fluterscheinung. Bei konstanter Wirkung würden zur Erschöpfung der Drehungsenergie $2000 \frac{28\,388 \cdot 10^{21}}{81\,349 \cdot 10^{17}}$ oder etwa 7000 Millionen Jahre nötig sein (was mit der Probe $81 \cdot 86\,164$ zusammenstimmt), bei abnehmender Wirkung noch längere Zeit. Die Kleinlichkeit der technischen Masseinheiten im Verhältnis zu kosmischen Erscheinungen tritt bei diesem Übungsbeispiele in überraschender Weise hervor.

i) Die Energie der drehend und fortschreitend bewegten Kugel.

$$E = \frac{m v^2}{2} + \frac{T \vartheta^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{m r^2 \vartheta^2}{5} = \frac{m}{10}\,(5\,v^2 + 2\,r^2 \vartheta^2).$$

Man kann also z. B. die gesamte Energie der Erdkugel berechnen.

k) Die Energie der ohne Gleitung rollenden Kugel.

$$E = \frac{m v^2}{2} + \frac{T \vartheta^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{T\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{T v^2}{2\,r^2}$$
$$= \frac{m v^2}{2} + \frac{2}{5}\,m r^2 \frac{v^2}{2\,r^2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{1}{5}\,m v^2 = \frac{7}{10}\,m v^2.$$

*) Bei Thomson und Tait, deutsch von Helmholtz und Wertheim, steht irrtümlich $\frac{1}{2\,700\,000}$ statt $\frac{1}{7\,200\,000}$, so daſs die Resultate dort ungenau werden.

1) Die Kugel als Pendel. Ist die Entfernung des Aufhängepunktes vom Mittelpunkte gleich e, so ist die Dauer kleiner Schwingungen

$$t = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}},$$

wo $T = \frac{2}{5} mr^2 + e^2 m$, $M = em$ ist. Der Schwingungspunkt hat vom Aufhängepunkte die Entfernung

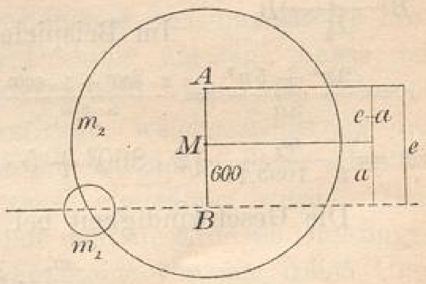
$$l = \frac{T}{M} = \frac{\frac{m}{5}(2r^2 + 5e^2)}{me} = \frac{2r^2 + 5e^2}{5e}.$$

(Reduzierte Pendellänge.)

175) Stofs gegen die Erdkugel.

Eine Kugel von der Gröfse und Masse der Erde werde von einem Weltkörper getroffen, dessen Masse der 1000ste Teil der Erdmasse ist und der mit 100000 m Geschwindigkeit gegen den stillstehend gedachten Erdball trifft, den er in einer Sehne schneiden würde, die vom Mittelpunkt die Entfernung 600 Meilen hat. Der Erdball habe einen Radius von 860 Meilen. Welche Bewegung tritt ein?

Fig. 135.



Auflösung. Nach der Stofstheorie ist die Entfernung der freiwilligen Drehungsachse für den Anfang der Bewegung in der Entfernung $BA = e = \frac{T_B}{M_B}$ zu suchen.

Das Trägheitsmoment der als homogen angenommenen Erdkugel für den Punkt B ist

$$T_B = \frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2 a^2,$$

das statische Moment für denselben Punkt

$$M_B = m_2 a;$$

demnach ist, da m_2 sich hebt, die Entfernung

$$BA = e = \frac{2r^2 + 5a^2}{5a}.$$

In B hat man sich eine Hülfsmasse zu denken, die in Bezug auf die Achse A dasselbe Trägheitsmoment hat wie die Kugel. Diese reduzierte Masse bestimmt sich aus der Gleichung

$$x e^2 = T_A$$

als

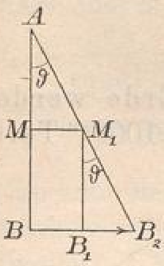
$$x = \frac{\frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2 (e - a)^2}{e^2} = \frac{m_2}{5 e^2} [2 r^2 + 5 (e - a)^2].$$

Jetzt handelt es sich bei B um den unelastischen Stofs zweier Massen m_1 und x mit den Geschwindigkeiten v_1 und $v_2 = 0$, so dafs die gemeinschaftliche Schlufsgeschwindigkeit bei B wird:

$$v_B = \frac{m_1 v_1 + x \cdot 0}{m_1 + x} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + x}.$$

Die Geschwindigkeit bei M wird kleiner im Verhältnis der von A aus gerechneten Abstände, d. h. die Schwerpunktsbewegung wird

Fig. 136.



$$v_s = v_B \frac{e - a}{e}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ϑ für den Radius 1 wird

$$\vartheta = \frac{B_1 B_2}{M_1 B_1} = \frac{v_B - v_s}{a}.$$

Im Beispiele ergiebt sich

$$e = \frac{2 r^2 + 5 a^2}{5 a} = \frac{2 \cdot 860^2 + 5 \cdot 600^2}{5 \cdot 600} = 1093{,}1 \text{ Meilen}; \; e - a = 493{,}1 \text{ Meilen};$$

$$x = \frac{m_2}{5 \cdot 1093{,}1^2} \cdot [2 \cdot 860^2 + 5 \cdot 493{,}1^2] = 0{,}45108\, m_2 \text{ ist die Hülfsmasse.}$$

Die Geschwindigkeit bei B wird

$$v_B = \frac{\frac{m_2}{1000} \cdot v_1}{\frac{m_2}{1000} + x} = \frac{100\,000}{452{,}08} = 221{,}2 \text{ m},$$

demnach erhält der Erdball die fortschreitende Bewegung

$$v_s = 221{,}2 \, \tfrac{493{,}1}{1093{,}1} = 99{,}785 \text{ m}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit endlich wird

$$\frac{221{,}2 - 96{,}785}{600 \cdot 7500} = 0{,}000269.$$

An der Stelle B ist der Kreisumfang gleich $2 \cdot 600 \cdot 7500 \cdot \pi$ Meter $= 9\,000\,000\, \pi$ Meter. Dies, dividiert durch $v_B - v_s = 121{,}42$ m, giebt eine Umlaufszeit von 232 870 Sek. oder etwa 3 Tagen.

Die verlorene Arbeitswucht (Energie) bei diesem Stofse beträgt $\frac{m_1 x}{m_1 + x} \frac{(v_1 - 0)^2}{2}$ mkg, wo $x = 0{,}45108\, m_2$ und m_2 bei dem spez. Gew. 5,6 der Erde gleich $\frac{\frac{4}{3} (860 \cdot 7500)^3 \pi \cdot 1000 \cdot 5{,}6}{9{,}81}$ ist, so dafs der Verlust an Arbeitswucht

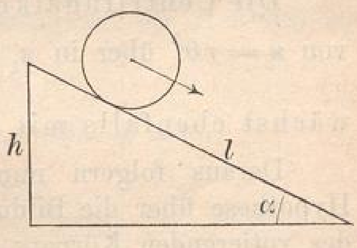
$$\frac{\frac{4}{3}(860 \cdot 7500)^3 \pi \cdot 1000 \cdot 5{,}6}{9{,}81} \cdot \frac{0{,}45108}{452{,}08} \cdot \frac{100000^2}{2} = \frac{m_2 \cdot 0{,}45108 \cdot 10\,000^2}{452{,}08 \cdot 2}$$

ist. Ein Teil dieser Arbeitswucht wird auf Umformung (Zerstörungsarbeit) verwendet, ein Teil in Wärme verwandelt. Angenommen, alles würde in Wärme übergehen, so würde durch $425 \cdot m_2$ zu dividieren sein*), wenn man die Anzahl der Wärmeeinheiten für die Masseneinheit erhalten will, durch $425 \cdot m_2 \cdot 9{,}81$, wenn man die Wärmeeinheiten für jedes Kilogramm finden will. Letzteres ergiebt rund 500 000 W.-E. Irgend ein Bruchteil derselben tritt als Erwärmung, der Rest als Zerstörungsarbeit auf. Um welchen Bruchteil es sich handelt, das hängt zum Teil von den chemischen Verhältnissen des Erdkörpers ab.

Nimmt man an, die Himmelskörper wären durch allmähliches Zusammenstürzen kosmischer Massen entstanden, so würde sich ihre fortschreitende Bewegung nebst der Drehung auf solche Weise ganz zwanglos erklären. Das mehrfach beobachtete plötzliche Aufleuchten neuer Fixsterne, deren Lichtstärke allmählich wieder abnimmt, deutet auf solche mit Wärmeentwickelung verbundene Zusammenstöfse hin.

Hatte der Erdkörper bereits eine Drehung um eine Achse, so würde in bekannter Weise diese einzusetzen sein. Nach der Poinsotschen Drehungstheorie könnte man ermitteln, welche Änderung die Drehungsbewegung unserer Erde durch einen solchen Stofs erhalten und welche neue Lage die Drehungsachse einnehmen würde. Das Problem läfst sich dahin spezialisieren, dafs man die Erde als Drehungsellipsoid annimmt, wobei die neue Achse keine von den freien Umdrehungsachsen zu werden braucht. Dies würde nicht nur auf Schwankungen (Nutation) der neuen Erdachse, sondern auch auf das Bestreben hinführen, ein neues „Geoid" zu bilden; die Verteilung der Ozeane würde eine andere werden u. s. w. Kurz, eine ganze Reihe weiterer Probleme der Mechanik und Potentialtheorie würde sich aufdrängen.

Fig. 137.



176) **Aufgabe.** Auf einer schiefen Ebene von Neigung α rolle eine Kugel ohne zu gleiten herab. Wie geschieht die Bewegung ohne weitere Berücksichtigung der Reibung?

*) Die obige Ausrechnung von m_2 ist unterlassen, weil, wenn man hier durch m_2 statt durch $1{,}001\, m_2$ dividiert, m_2 sich weghebt, so dass es sich nur um den Bruch

$$\frac{0{,}45108 \cdot 10^{10}}{452{,}08 \cdot 2 \cdot 9{,}81}$$

handelt.

Auflösung. Arbeit der Schwerkraft ph gleich der Energie

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{T\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{7}{10} mv^2$$

zu setzen, oder

$$mgh = \frac{7}{10} mv^2, \quad v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{2g_1 h} = \sqrt{2g_1 l \sin\alpha},$$

also Beschleunigung $g_1 = \frac{5}{7} g \sin\alpha$.

177) **Aufgabe.** Wie grofs würde die Zunahme der Erddrehung sein, wenn sich die Erde vom Radius r auf den Radius r_1 zusammenzöge?

Auflösung. Das Trägheitsmoment $T = \frac{2}{5} mr^2$ würde übergehen in $T_1 = \frac{2}{5} mr_1^2$, die Winkelgeschwindigkeit ϑ in die zu berechnende ϑ_1. Nimmt man an, die Drehungsenergie bliebe unverändert, was ziemlich wahrscheinlich ist, so hat man zu setzen:

$$\frac{T_1 \vartheta_1^2}{2} = \frac{T\vartheta^2}{2}$$

oder

$$\frac{2}{5} mr_1^2 \cdot \frac{\vartheta_1^2}{2} = \frac{2}{5} mr^2 \cdot \frac{\vartheta^2}{2},$$

woraus folgt:

$$\vartheta_1 = \frac{r}{r_1} \vartheta,$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeit wächst mit dem Verhältnisse $\frac{r}{r_1}$. Aus $r\vartheta = r_1 \vartheta_1$ folgt zugleich, dafs die Äquatorialgeschwindigkeit unverändert bleibt. Dasselbe gilt unter einer einfachen Annahme von jedem Massenteilchen.

Die Centrifugalkraft am Äquator geht für die Masseneinheit von $\varkappa = r\vartheta^2$ über in $\varkappa_1 = r_1 \vartheta_1^2 = r_1 \frac{r^2}{r_1^2} \vartheta^2 = \frac{r}{r_1}(r\vartheta^2) = \frac{r}{r_1}\varkappa$, d. h. sie wächst ebenfalls mit dem Verhältnisse $\frac{r}{r_1}$.

Daraus folgern nun zahlreiche Anhänger der Laplaceschen Hypothese über die Bildung des Sonnensystemes, dafs die Abplattung des rotierenden Körpers gleichfalls wachsen müsse. Dies ist aber falsch. Es ist nämlich zu berücksichtigen, dafs gleichzeitig die Schwerkraft auf der Kugelfläche in dem stärkeren Verhältnisse $\frac{r^2}{r_1^2}$ zunimmt, dafs z. B. bei der Erde die Freifallbeschleunigung g in $g\frac{r^2}{r_1^2}$

übergeht. Der sogenannte Abplattungsfaktor $\frac{\varkappa}{g} = \frac{r\vartheta^2}{g}$ (der nicht etwa das Maſs der Abplattung selbst angiebt, und dessen Betrag für die Erde etwa $\frac{1}{290}$ ist) geht über in $\frac{\varkappa_1}{g_1} = \frac{r}{r_1}\varkappa \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{\varkappa r_1}{gr}$, d. h. der Abplattungsfaktor nimmt ab im Verhältnisse der beiden Radien, er nimmt nicht zu.

178) Allgemeine Folgerungen.

Eine Fläche habe die Querschnittsformel

$$1)\qquad x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots.$$

Ist die Reihe unendlich lang, so muſs die Betrachtung auf den Konvergenzbereich beschränkt werden, während bei endlicher Reihe Einschränkungen nicht nötig sind. Der Inhalt von 0 bis y wird

$$2)\qquad \overset{y}{\underset{0}{F}} = \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4} + \frac{ey^5}{5} + \cdots.$$

Das statische Moment des Streifens 1) in Bezug auf die X-Achse ist

$$xy = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \cdots,$$

das entsprechenden Moment der Gesamtfläche also

$$3)\qquad M_x = \frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \frac{dy^5}{5} + \frac{ey^6}{6} + \cdots.$$

Daraus folgt die Schwerpunktshöhe

$$4)\qquad y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \cdots}{\frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \cdots}.$$

Das Trägheitsmoment des Streifens 1) in Bezug auf die X-Achse ist

$$xy^2 = ay^2 + by^3 + cy^4 + dy^5 + \cdots,$$

das entsprechende Trägheitsmoment der Gesamtfläche also

$$5)\qquad T_x = \frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \frac{dy^6}{6} + \cdots.$$

Für die horizontale Schwerpunktsachse ist es

$$6)\qquad T_s = T_x - y_s^2 F = T_x - \frac{M_x^2}{F^2} F = T_x - \frac{M_x^2}{F}.$$

Der Trägheitsradius in Bezug auf die X-Achse bestimmt sich aus

$$7) \qquad \varrho_x^2 = \frac{T_x}{F} = \frac{\frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \cdots}{\frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \cdots}.$$

Der Schwingungspunkt in Bezug auf die X-Achse liegt für die Fläche in der Entfernung

$$8) \qquad \lambda_x = \frac{T_x}{M_x} = \frac{\frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \cdots}{\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \cdots}.$$

Das Centrifugalmoment des Streifens 1) in Bezug auf die Koordinatenachsen ist, wenn die Abstände x sich direkt an die Y-Achse ansetzen und im ersten Quadranten bleiben:

$$\frac{x^2}{2}y = \frac{a^2}{2}y + \frac{2ab}{2}y^2 + \frac{b^2+2ac}{2}y^3 + \frac{2ad+2bc}{2}y^4 + \frac{c^2+2ae+2bd}{2}y^5 + \cdots$$

Dies ergiebt sich aus beiderseitiger Quadrierung von 1) und darauf folgender Multiplikation mit $\frac{y}{2}$. (Ist die erste Bedingung nicht erfüllt, so erledigt sich die Sache durch Subtraktion.) Folglich ist das Centrifugalmoment der Fläche

$$M_{xy} = \frac{a^2}{2}\frac{y^2}{2} + \frac{2ab}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{b^2+2ac}{2}\frac{y^4}{4} + \frac{2ad+2bc}{2}\frac{y^5}{5} + \frac{c^2+2ae+2bd}{2}\frac{y^6}{6} + \cdots$$

Übersichtlicher ist es für geringere Gliederzahl, z. B. für $x = a + by + cy^2$. Dann ergiebt sich für den Streifen

$$\frac{x^2}{2}y = \frac{a^2}{2}y + \frac{2ab}{2}y^2 + \frac{b^2+2ac}{2}y^3 + \frac{2bc}{2}y^4 + \frac{c^2}{2}y^5,$$

folglich für die Fläche

$$M_{xy} = \frac{a^2}{2}\frac{y^2}{2} + \frac{2ab}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{b^2+2ac}{2}\frac{y^4}{4} + \frac{2bc}{2}\frac{y^5}{5} + \frac{c^2}{2}\frac{y^6}{6}.$$

Der durch Drehung der Fläche um die Y-Achse entstehende Körper hat die Querschnittsformel

$$q_y = x^2\pi = \pi\,[a^2 + 2aby + (b^2 + 2ac)\,y^2 + (2bc + 2ad)\,y^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)\,y^4 + \cdots].$$

Sein Inhalt bis zur Höhe y wird daher

$$J = \pi\left[\frac{a^2y}{1} + 2ab\,\frac{y^2}{2} + (b^2 + 2ac)\,\frac{y^3}{3} + (2bc + 2ad)\,\frac{y^4}{4} + (c^2 + 2ae + 2bd)\,\frac{y^5}{5} + \cdots\right].$$

Die Formel für das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die Grundfläche, d. h. für $x^2\pi y$, ist leicht aufzustellen, ebenso das Trägheitsmoment, und so kann man diese Ausdrücke auch für den Drehungskörper leicht hinschreiben und die entsprechenden Schlüsse ziehen.

Ist 1) der Querschnitt eines Körpers, so gelten die Formeln 2) bis 6) in Bezug auf die Ebene, von der aus die y gerechnet werden.

Um die obigen Betrachtungen für die Y-Achse zu wiederholen, mufs man y durch x ausdrücken, was auf Irrationalitäten und auf gebrochene Exponenten führt. Daher mufs für solche das Nötigste gesagt werden.

C. Die Parabeln gebrochener und negativer Ordnung und die Schichtenformel für gebrochene und negative Exponenten.

179) Oben war gezeigt worden, dafs die Parabel p^{ter} Ordnung $x = y^p$, wenn p ganz ist, von dem Rechteck mit den Seiten h und $b = h^p$ den $(p+1)^{\text{ten}}$ Teil abschneidet, so dafs die Fläche gleich $\frac{h^{p+1}}{p+1}$ ist. Die Fläche von h_1 bis h_2 würde sein

$$\overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = \frac{h_2^{p+1} - h_1^{p+1}}{p+1}.$$

Es fragt sich, was davon richtig bleibt, wenn p auch gebrochene und negative Werte annimmt.

Die Betrachtung soll auf den ersten Quadranten eingeschränkt werden, da sich die übrigen ebenso behandeln lassen und gerade in der Y-Achse die kritische Stelle liegt, die Zweifel bringen könnte.

Es handle sich also um die Kurve $x = y^\alpha$, wo α lediglich der Bedingung gehorchen soll, reell zu sein. Im Methodischen Lehrbuche, Band 3,

Fig. 138

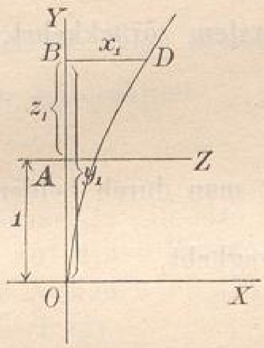
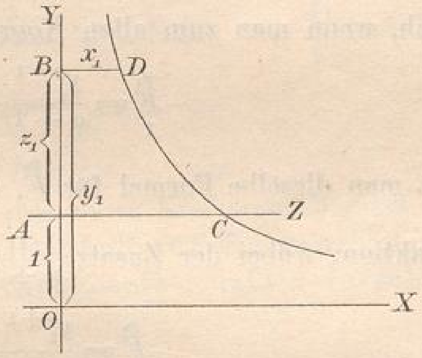


Fig. 139.



Algebr. Analysis V, ist dieser Fall behandelt worden; hier soll die Behandlung auf andere Weise geschehen. Zunächst ist zu bemerken, dafs bei positivem α die Kurve von O aus aufsteigt, und zwar bis zu unendlicher Höhe, dafs sie dagegen bei negativem α aus unendlicher Höhe bis zu Null herabsinkt. Welcher Fall vorliegt, ist vorläufig gleichgültig.

Es kommt darauf an, an Stelle von $x = y^\alpha$ eine Reihe zu erhalten, die nach ganzen positiven Potenzen fortschreitet. Zu