Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Anwendung auf unendliche Reihen.

$$q = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots + ky^p$$

so ist sein Inhalt, von der Höhe $y = 0$ bis zur Höhe $y = h$ gerechnet,

$$\overset{h}{\underset{0}{J}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \cdots + k\frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

173) Durch diese Formel wird ein Bereich beherrscht, der weit über den der Simpsonschen Regel hinausgeht. Die Zahl der Glieder darf unter gewissen Bedingungen sogar bis ins Unendliche gehen.

Ist z. B. der Querschnitt durch folgende unendliche Reihe dargestellt

1) $$q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots \text{ in infinitum},$$

so folgt daraus

2) $$\overset{h}{\underset{0}{J}} = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \frac{eh^5}{5} + \cdots \text{ in infinitum},$$

nur mufs der Konvergenzbereich beider Reihen eingehalten werden.

Die Formeln können auf alle Funktionen angewandt werden, die sich in konvergenten Potenzreihen entwickeln lassen.

Dies gilt z. B. von der geometrischen Reihe, also von der Kurve

$$x = \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots \quad \text{für } y \text{ absolut} < 1,$$

von der Exponentialreihe, also von der logarithmischen Linie

$$x = e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots,$$

und zwar für jedes y; ferner von der logarithmischen Linie

$$x = {}^e\lg y = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \cdots \quad \text{für } y \text{ absolut} < 1,$$

von der Kettenlinie

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = 1 + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{y^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots,$$

von der Sinuskurve

$$x = \sin y = \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots,$$

von Kurven, deren Gleichung mit dem binomischen Lehrsatze zusammenhängt, wie

$$x = \sqrt{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{2}}$$

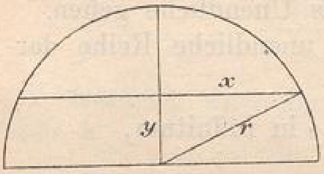
$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}y + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 + \cdots$$

für y absolut < 1.

Diese Bemerkungen mögen vorläufig hinreichen, von der weitgehenden Bedeutung des Verfahrens ein Bild zu geben, denn die obigen Deutungen bleiben hier sämtlich erhalten. Einige Beispiele werden die Sache näher erläutern.

174) Anwendungen auf die Halbkugel und die ganze Kugel.

Fig. 134.



a) Inhaltsberechnung. Der Schnitt in Höhe y ist

$$q = x^2\pi = (r^2 - y^2)\pi = r^2\pi - y^2\pi.$$

Folglich: Inhalt der Schicht von 0 bis y_1 ist

$$\overset{h_1}{\underset{0}{J}} = \frac{r^2\pi y_1}{1} - \frac{\pi y_1^3}{3} = \frac{y_1\pi}{3}(r^2 - y_1^2),$$

Inhalt der Halbkugel

$$\overset{r}{\underset{0}{J}} = r^2\pi\,\frac{r_1}{1} - \pi\,\frac{r_1^3}{3} = \frac{2}{3}r^3\pi.$$

b) Das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche. Die in Höhe y befindliche Schicht hatte die Fläche $x^2\pi$, die Multiplikation mit dem Abstande y giebt $x^2y\pi$ oder $(r^2 - y^2)y\pi = r^2\pi y - y^3\pi$. Aus

$$q = r^2\pi y - y^3\pi$$

folgt als statisches Moment der Schicht von 0 bis y_1

$$\overset{y_1}{\underset{0}{M}} = r^2\pi\,\frac{y_1^2}{2} - \pi\,\frac{y_1^4}{4} = \frac{y_1^2\pi}{4}(2r^2 - y_1^2).$$

Das statische Moment der Halbkugel für die Grundfläche ist

$$\overset{r}{\underset{0}{M}} = r^2\pi\,\frac{r^2}{2} - \pi\,\frac{r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{4}.$$

c) Schwerpunktshöhe.

Die Schwerpunktshöhe der Schicht ist

$$h_s = \frac{\overset{y_1}{\underset{0}{M}}}{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}} = \frac{\frac{y_1^2\pi}{4}(2r^2 - y_1^2)}{\frac{y_1\pi}{3}(r^2 - y_1^2)} = \frac{3y_1}{4}\,\frac{2r^2 - y_1^2}{r^2 - y_1^2}.$$

die Schwerpunktshöhe der Halbkugel

$$h_s = \frac{\overset{r}{\underset{0}{M}}}{\overset{r}{\underset{0}{J}}} = \frac{\frac{r^4\pi}{4}}{\frac{2}{3}r^3\pi} = \frac{3}{8}r.$$