Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

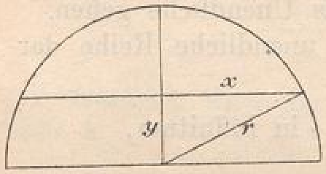
Leipzig, 1897

Anwendungen auf die Mechanik der Halbkugel und Kugel.

Diese Bemerkungen mögen vorläufig hinreichen, von der weitgehenden Bedeutung des Verfahrens ein Bild zu geben, denn die obigen Deutungen bleiben hier sämtlich erhalten. Einige Beispiele werden die Sache näher erläutern.

174) Anwendungen auf die Halbkugel und die ganze Kugel.

Fig. 134.



a) Inhaltsberechnung. Der Schnitt in Höhe y ist

$$q = x^2\pi = (r^2 - y^2)\,\pi = r^2\pi - y^2\pi\,.$$

Folglich: Inhalt der Schicht von 0 bis y_1 ist

$$\overset{h_1}{\underset{0}{J}} = \frac{r^2\pi y_1}{1} - \frac{\pi y_1^3}{3} = \frac{y_1\pi}{3}\left(r^2 - y_1^2\right),$$

Inhalt der Halbkugel

$$\overset{r}{\underset{0}{J}} = r^2\pi\,\frac{r_1}{1} - \pi\,\frac{r_1^3}{3} = \frac{2}{3}\,r^3\pi\,.$$

b) Das statische Moment in Bezug auf die Grundfläche. Die in Höhe y befindliche Schicht hatte die Fläche $x^2\pi$, die Multiplikation mit dem Abstande y giebt $x^2 y\pi$ oder $(r^2 - y^2)\,y\pi = r^2\pi y - y^3\pi$. Aus

$$q = r^2\pi y - y^3\pi$$

folgt als statisches Moment der Schicht von 0 bis y_1

$$\overset{y_1}{\underset{0}{M}} = r^2\pi\,\frac{y_1^2}{2} - \pi\,\frac{y_1^4}{4} = \frac{y_1^2\pi}{4}\left(2\,r^2 - y_1^2\right).$$

Das statische Moment der Halbkugel für die Grundfläche ist

$$\overset{r}{\underset{0}{M}} = r^2\pi\,\frac{r^2}{2} - \pi\,\frac{r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{4}\,.$$

c) Schwerpunktshöhe.

Die Schwerpunktshöhe der Schicht ist

$$h_s = \frac{\overset{y_1}{\underset{0}{M}}}{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}} = \frac{\dfrac{y_1^2\pi}{4}\left(2\,r^2 - y_1^2\right)}{\dfrac{y_1\pi}{3}\left(r^2 - y_1^2\right)} = \frac{3\,y_1}{4}\,\frac{2\,r^2 - y_1^2}{r^2 - y_1^2}\,.$$

die Schwerpunktshöhe der Halbkugel

$$h_s = \frac{\overset{r}{\underset{0}{M}}}{\overset{r}{\underset{0}{J}}} = \frac{\dfrac{r^4\pi}{4}}{\dfrac{2}{3}\,r^3\pi} = \frac{3}{8}\,r\,.$$

d) Trägheitsmoment in Bezug auf die Grundfläche. Die Schicht in Höhe y ist mit y^2 zu multiplizieren, wenn man ihr Trägheitsmoment für die Grundfläche erhalten will. Dies giebt

$$q_y = x^2\pi y^2 = (r^2 - y^2)\,\pi y^2 = r^2\pi y^2 - \pi y^4.$$

Das Trägheitsmoment für die Schichten von 0 bis y_1 wird also

$$\overset{y_1}{\underset{0}{T}} = r^2\pi\,\frac{y_1^3}{3} - \pi\,\frac{y_1^5}{5} = \frac{y_1^3\pi}{15}\,(5\,r^2 - 3\,y_1^2).$$

Für die Halbkugel selbst wird es

$$\overset{r}{\underset{0}{T}} = r^2\pi\,\frac{r^3}{3} - \pi\,\frac{r^5}{5} = \tfrac{2}{15}\,r^5\pi.$$

e) Der entsprechende Trägheitsradius. Er bestimmt sich aus der Formel $y_t^2 J = T$, also wird er für die Schichten von 0 bis y_1

$$y_t = \sqrt{\frac{\overset{y_1}{\underset{0}{T}}}{\overset{y_1}{\underset{0}{J}}}} = \sqrt{\frac{\frac{y_1^3\pi}{15}(5\,r^2 - 3\,y_1^2)}{\frac{y_1\pi}{3}(r^2 - y_1^2)}} = \sqrt{\frac{3\,y_1^2\,(5\,r^2 - 3\,y_1^2)}{15\,(r^2 - y_1^2)}},$$

für die Halbkugel

$$y_t = \sqrt{\frac{\frac{2}{15}\,r^5\pi}{\frac{2}{3}\,r^3\pi}} = r\sqrt{\tfrac{1}{5}}.$$

e) Das Trägheitsmoment der ganzen Kugel in Bezug auf einen Hauptschnitt ist

$$T = \tfrac{4}{15}\,r^5\pi.$$

f) Das axiale Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf einen Durchmesser ist gleich der Summe zweier planen Trägheitsmomente (in Bezug auf zwei auf einander senkrechte Hauptschnitte), also

$$T_a = \tfrac{8}{15}\,r^5\pi = \left(\tfrac{4}{3}\,r^3\pi\right)\frac{2\,r^2}{5} = \frac{2\,r^2}{5}\,m,$$

wo m die Masse der Kugel bedeutet.

g) Der axiale Trägheitsradius wird

$$r_t = \sqrt{\frac{T_a}{J}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{15}\,r^5\pi}{\frac{4}{3}\,r^3\pi}} = r\,\sqrt{\tfrac{2}{5}}.$$

h) Die Energie der homogenen sich drehenden Kugel ist

$$E = \frac{T\vartheta^2}{2} = \frac{2\,r^2}{5}\,m\,\frac{\vartheta^2}{2} = \frac{mr^2\vartheta^2}{5},$$

wo m die Masse, ϑ die am Radius 1 gemessene Winkelgeschwindigkeit ist. Für den Erdball z. B. ist $T = \frac{8\, r^5 \pi}{15} \frac{p'}{g}$, wo das spezifische Gewicht $p' = 5{,}6$, $g = 9{,}81$ m und $r = 860 \cdot 7500$ m angenommen werden kann. Die Umdrehungszeit ist 86 164 Sekunden (Sterntag, nicht Sonnentag von 86 400 Sek.), die Winkelgeschwindigkeit also $\vartheta = \frac{2\pi}{86\,164}$. Die Drehungsenergie ist daher $\frac{1}{2} \frac{8\, r^5 \pi}{15} \frac{5{,}6}{9{,}81} \left(\frac{2\pi}{86\,164}\right)^2 = 28\,388 \cdot 10^{21}$ Metertonnen $= 28\,388 \cdot 10^{24}$ mkg. Division durch 425 giebt die in dieser Energie enthaltene Anzahl von Wärmeeinheiten, nämlich $66\,797 \cdot 10^{21}$ W.-E. Angenommen, der Sterntag wäre jetzt $\frac{1}{81}$ Sekunde länger als vor 2000 Jahren, so wäre die frühere Winkelgeschwindigkeit gewesen $\vartheta_1 = \frac{2\pi}{86\,163\frac{80}{81}} = \frac{6\,979\,284}{6\,979\,283}\,\vartheta$ *), der Energieverlust also

$$28\,388 \cdot 10^{24} \frac{6\,979\,284^2 - 6\,979\,283^2}{6\,979\,283^2} = 81\,349 \cdot 10^{17} \text{ mkg.}$$

Man kann den mittleren Energieverlust innerhalb der 2000 Jahre auf die Sekunde reduzieren, indem man abgerundet durch $2000 \cdot 365{,}25 \cdot 86\,400$ dividiert. Er beträgt auf die Sekunde $12\,918 \cdot 10^7$ mkg. Division durch 75 giebt $17\,225 \cdot 10^5$ Pferdestärken, mit denen unter jener bekannten Annahme an der Verlangsamung der Erddrehung gearbeitet wird, und zwar besonders durch den Einfluſs der Fluterscheinung. Bei konstanter Wirkung würden zur Erschöpfung der Drehungsenergie $2000 \frac{28\,388 \cdot 10^{21}}{81\,349 \cdot 10^{17}}$ oder etwa 7000 Millionen Jahre nötig sein (was mit der Probe $81 \cdot 86\,164$ zusammenstimmt), bei abnehmender Wirkung noch längere Zeit. Die Kleinlichkeit der technischen Masseinheiten im Verhältnis zu kosmischen Erscheinungen tritt bei diesem Übungsbeispiele in überraschender Weise hervor.

i) Die Energie der drehend und fortschreitend bewegten Kugel.

$$E = \frac{m v^2}{2} + \frac{T \vartheta^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{m r^2 \vartheta^2}{5} = \frac{m}{10}(5 v^2 + 2 r^2 \vartheta^2).$$

Man kann also z. B. die gesamte Energie der Erdkugel berechnen.

k) Die Energie der ohne Gleitung rollenden Kugel.

$$E = \frac{m v^2}{2} + \frac{T \vartheta^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{T\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{T v^2}{2 r^2}$$
$$= \frac{m v^2}{2} + \frac{2}{5} m r^2 \frac{v^2}{2 r^2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{1}{5} m v^2 = \frac{7}{10} m v^2.$$

*) Bei Thomson und Tait, deutsch von Helmholtz und Wertheim, steht irrtümlich $\frac{1}{2\,700\,000}$ statt $\frac{1}{7\,200\,000}$, so daſs die Resultate dort ungenau werden.

1) Die Kugel als Pendel. Ist die Entfernung des Aufhängepunktes vom Mittelpunkte gleich e, so ist die Dauer kleiner Schwingungen

$$t = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}},$$

wo $T = \frac{2}{5} mr^2 + e^2 m$, $M = em$ ist. Der Schwingungspunkt hat vom Aufhängepunkte die Entfernung

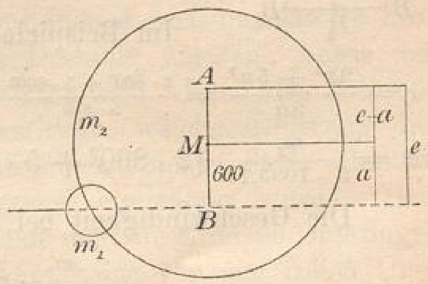
$$l = \frac{T}{M} = \frac{\frac{m}{5}(2r^2 + 5e^2)}{me} = \frac{2r^2 + 5e^2}{5e}.$$

(Reduzierte Pendellänge.)

175) Stofs gegen die Erdkugel.

Eine Kugel von der Gröfse und Masse der Erde werde von einem Weltkörper getroffen, dessen Masse der 1000ste Teil der Erdmasse ist und der mit 100000 m Geschwindigkeit gegen den stillstehend gedachten Erdball trifft, den er in einer Sehne schneiden würde, die vom Mittelpunkt die Entfernung 600 Meilen hat. Der Erdball habe einen Radius von 860 Meilen. Welche Bewegung tritt ein?

Fig. 135.



Auflösung. Nach der Stofstheorie ist die Entfernung der freiwilligen Drehungsachse für den Anfang der Bewegung in der Entfernung $BA = e = \frac{T_B}{M_B}$ zu suchen.

Das Trägheitsmoment der als homogen angenommenen Erdkugel für den Punkt B ist

$$T_B = \frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2 a^2,$$

das statische Moment für denselben Punkt

$$M_B = m_2 a;$$

demnach ist, da m_2 sich hebt, die Entfernung

$$BA = e = \frac{2r^2 + 5a^2}{5a}.$$

In B hat man sich eine Hülfsmasse zu denken, die in Bezug auf die Achse A dasselbe Trägheitsmoment hat wie die Kugel. Diese reduzierte Masse bestimmt sich aus der Gleichung