Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Allgemeine Folgerungen.

übergeht. Der sogenannte Abplattungsfaktor $\frac{\varkappa}{g} = \frac{r\vartheta^2}{g}$ (der nicht etwa das Maſs der Abplattung selbst angiebt, und dessen Betrag für die Erde etwa $\frac{1}{290}$ ist) geht über in $\frac{\varkappa_1}{g_1} = \frac{r}{r_1}\varkappa \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{\varkappa r_1}{gr}$, d. h. der Abplattungsfaktor nimmt ab im Verhältnisse der beiden Radien, er nimmt nicht zu.

178) Allgemeine Folgerungen.

Eine Fläche habe die Querschnittsformel

1) $$x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots.$$

Ist die Reihe unendlich lang, so muſs die Betrachtung auf den Konvergenzbereich beschränkt werden, während bei endlicher Reihe Einschränkungen nicht nötig sind. Der Inhalt von 0 bis y wird

2) $$\overset{y}{\underset{0}{F}} = \frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \frac{dy^4}{4} + \frac{ey^5}{5} + \cdots.$$

Das statische Moment des Streifens 1) in Bezug auf die X-Achse ist

$$xy = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \cdots,$$

das entsprechenden Moment der Gesamtfläche also

3) $$M_x = \frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \frac{dy^5}{5} + \frac{ey^6}{6} + \cdots.$$

Daraus folgt die Schwerpunktshöhe

4) $$y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \cdots}{\frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \cdots}.$$

Das Trägheitsmoment des Streifens 1) in Bezug auf die X-Achse ist

$$xy^2 = ay^2 + by^3 + cy^4 + dy^5 + \cdots,$$

das entsprechende Trägheitsmoment der Gesamtfläche also

5) $$T_x = \frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \frac{dy^6}{6} + \cdots.$$

Für die horizontale Schwerpunktsachse ist es

6) $$T_s = T_x - y_s^2 F = T_x - \frac{M_x^2}{F^2} F = T_x - \frac{M_x^2}{F}.$$

Der Trägheitsradius in Bezug auf die X-Achse bestimmt sich aus

$$7) \qquad \varrho_x^2 = \frac{T_x}{F} = \frac{\frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \cdots}{\frac{ay}{1} + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^3}{3} + \cdots}.$$

Der Schwingungspunkt in Bezug auf die X-Achse liegt für die Fläche in der Entfernung

$$8) \qquad \lambda_x = \frac{T_x}{M_x} = \frac{\frac{ay^3}{3} + \frac{by^4}{4} + \frac{cy^5}{5} + \cdots}{\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \cdots}.$$

Das Centrifugalmoment des Streifens 1) in Bezug auf die Koordinatenachsen ist, wenn die Abstände x sich direkt an die Y-Achse ansetzen und im ersten Quadranten bleiben:

$$\frac{x^2}{2}y = \frac{a^2}{2}y + \frac{2ab}{2}y^2 + \frac{b^2+2ac}{2}y^3 + \frac{2ad+2bc}{2}y^4 + \frac{c^2+2ae+2bd}{2}y^5 + \cdots$$

Dies ergiebt sich aus beiderseitiger Quadrierung von 1) und darauf folgender Multiplikation mit $\frac{y}{2}$. (Ist die erste Bedingung nicht erfüllt, so erledigt sich die Sache durch Subtraktion.) Folglich ist das Centrifugalmoment der Fläche

$$M_{xy} = \frac{a^2}{2}\frac{y^2}{2} + \frac{2ab}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{b^2+2ac}{2}\frac{y^4}{4} + \frac{2ad+2bc}{2}\frac{y^5}{5} + \frac{c^2+2ae+2bd}{2}\frac{y^6}{6} + \cdots$$

Übersichtlicher ist es für geringere Gliederzahl, z. B. für $x = a + by + cy^2$. Dann ergiebt sich für den Streifen

$$\frac{x^2}{2}y = \frac{a^2}{2}y + \frac{2ab}{2}y^2 + \frac{b^2+2ac}{2}y^3 + \frac{2bc}{2}y^4 + \frac{c^2}{2}y^5,$$

folglich für die Fläche

$$M_{xy} = \frac{a^2}{2}\frac{y^2}{2} + \frac{2ab}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{b^2+2ac}{2}\frac{y^4}{4} + \frac{2bc}{2}\frac{y^5}{5} + \frac{c^2}{2}\frac{y^6}{6}.$$

Der durch Drehung der Fläche um die Y-Achse entstehende Körper hat die Querschnittsformel

$$q_y = x^2\pi = \pi\,[a^2 + 2aby + (b^2+2ac)\,y^2 + (2bc+2ad)\,y^3 + (c^2+2ae+2bd)\,y^4 + \cdots].$$

Sein Inhalt bis zur Höhe y wird daher

$$J = \pi\left[\frac{a^2y}{1} + 2ab\,\frac{y^2}{2} + (b^2+2ac)\,\frac{y^3}{3} + (2bc+2ad)\,\frac{y^4}{4} + (c^2+2ae+2bd)\,\frac{y^5}{5} + \cdots\right].$$

Die Formel für das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die Grundfläche, d. h. für $x^2\pi y$, ist leicht aufzustellen, ebenso das Trägheitsmoment, und so kann man diese Ausdrücke auch für den Drehungskörper leicht hinschreiben und die entsprechenden Schlüsse ziehen.

Ist 1) der Querschnitt eines Körpers, so gelten die Formeln 2) bis 6) in Bezug auf die Ebene, von der aus die y gerechnet werden.

Um die obigen Betrachtungen für die Y-Achse zu wiederholen, mufs man y durch x ausdrücken, was auf Irrationalitäten und auf gebrochene Exponenten führt. Daher mufs für solche das Nötigste gesagt werden.

C. Die Parabeln gebrochener und negativer Ordnung und die Schichtenformel für gebrochene und negative Exponenten.

179) Oben war gezeigt worden, dafs die Parabel p^{ter} Ordnung $x = y^p$, wenn p ganz ist, von dem Rechteck mit den Seiten h und $b = h^p$ den $(p+1)^{\text{ten}}$ Teil abschneidet, so dafs die Fläche gleich $\frac{h^{p+1}}{p+1}$ ist. Die Fläche von h_1 bis h_2 würde sein

$$\overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = \frac{h_2^{p+1} - h_1^{p+1}}{p+1}.$$

Es fragt sich, was davon richtig bleibt, wenn p auch gebrochene und negative Werte annimmt.

Die Betrachtung soll auf den ersten Quadranten eingeschränkt werden, da sich die übrigen ebenso behandeln lassen und gerade in der Y-Achse die kritische Stelle liegt, die Zweifel bringen könnte.

Es handle sich also um die Kurve $x = y^\alpha$, wo α lediglich der Bedingung gehorchen soll, reell zu sein. Im Methodischen Lehrbuche, Band 3,

Fig. 138

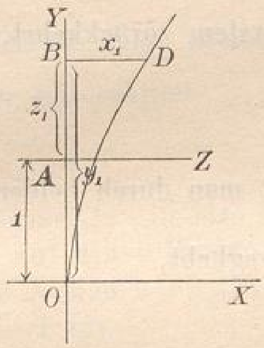
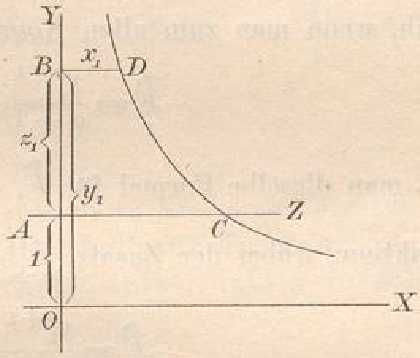


Fig. 139.



Algebr. Analysis V, ist dieser Fall behandelt worden; hier soll die Behandlung auf andere Weise geschehen. Zunächst ist zu bemerken, dafs bei positivem α die Kurve von O aus aufsteigt, und zwar bis zu unendlicher Höhe, dafs sie dagegen bei negativem α aus unendlicher Höhe bis zu Null herabsinkt. Welcher Fall vorliegt, ist vorläufig gleichgültig.

Es kommt darauf an, an Stelle von $x = y^\alpha$ eine Reihe zu erhalten, die nach ganzen positiven Potenzen fortschreitet. Zu