Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Flächenberechnung mit Hülfe der Entwicklung in unendliche Reihen.

Ist 1) der Querschnitt eines Körpers, so gelten die Formeln 2) bis 6) in Bezug auf die Ebene, von der aus die y gerechnet werden.

Um die obigen Betrachtungen für die Y-Achse zu wiederholen, mufs man y durch x ausdrücken, was auf Irrationalitäten und auf gebrochene Exponenten führt. Daher mufs für solche das Nötigste gesagt werden.

C. Die Parabeln gebrochener und negativer Ordnung und die Schichtenformel für gebrochene und negative Exponenten.

179) Oben war gezeigt worden, dafs die Parabel p^{ter} Ordnung $x = y^p$, wenn p ganz ist, von dem Rechteck mit den Seiten h und $b = h^p$ den $(p+1)^{\text{ten}}$ Teil abschneidet, so dafs die Fläche gleich $\frac{h^{p+1}}{p+1}$ ist. Die Fläche von h_1 bis h_2 würde sein

$$\overset{h_2}{\underset{h_1}{F}} = \frac{h_2^{p+1} - h_1^{p+1}}{p+1}.$$

Es fragt sich, was davon richtig bleibt, wenn p auch gebrochene und negative Werte annimmt.

Die Betrachtung soll auf den ersten Quadranten eingeschränkt werden, da sich die übrigen ebenso behandeln lassen und gerade in der Y-Achse die kritische Stelle liegt, die Zweifel bringen könnte.

Es handle sich also um die Kurve $x = y^\alpha$, wo α lediglich der Bedingung gehorchen soll, reell zu sein. Im Methodischen Lehrbuche, Band 3,

Fig. 138

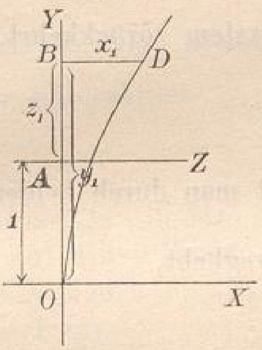
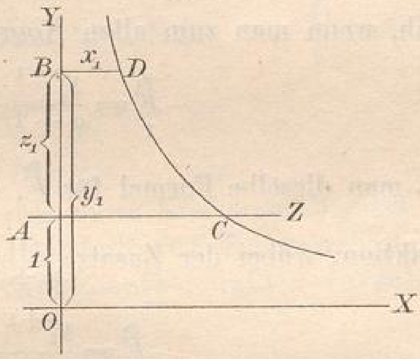


Fig. 139.



Algebr. Analysis V, ist dieser Fall behandelt worden; hier soll die Behandlung auf andere Weise geschehen. Zunächst ist zu bemerken, dafs bei positivem α die Kurve von O aus aufsteigt, und zwar bis zu unendlicher Höhe, dafs sie dagegen bei negativem α aus unendlicher Höhe bis zu Null herabsinkt. Welcher Fall vorliegt, ist vorläufig gleichgültig.

Es kommt darauf an, an Stelle von $x = y^\alpha$ eine Reihe zu erhalten, die nach ganzen positiven Potenzen fortschreitet. Zu diesem Zwecke hat man nur nötig, das Koordinatensystem zu verschieben, z. B. den Nullpunkt in senkrechter Richtung von O nach A zu verlegen, wobei z. B. $OA = 1$ sein soll. In diesem Sonderfalle wird die neue Ordinate $z = y - 1$, (also $y = z + 1$), während x unverändert bleibt. Nach dem binomischen Satze für gebrochene und negative Exponenten, dessen Beweis man im dritten Bande des Meth. Lehrbuchs findet, ist dann die neue Kurvengleichung

$$x = (1 + z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1} z + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \cdots,$$

eine Reihe, die Geltung hat für $1 - < z < + 1$, so dafs man sich zunächst innerhalb dieses Konvergenzbereiches zu halten hat.

Nach der Schichtenformel ist dann

$$\overset{z_1}{\underset{0}{F}} = \frac{z_1}{1} + \frac{\alpha}{1} \frac{z_1^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} \frac{z_1^3}{3} + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{z_1^4}{4} + \cdots.$$

Um rechts wieder eine binomische Reihe zu erhalten, multipliziere man beiderseits mit $(\alpha + 1)$ und addiere beiderseits 1. Dies giebt

$$1 + (\alpha + 1) \cdot \overset{z_1}{\underset{0}{F}} = 1 + \frac{\alpha + 1}{1} z_1 + \frac{(\alpha + 1)\alpha}{1 \cdot 2} z_1^2 + \frac{(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z_1^3 + \cdots$$
$$= (1 + z_1)^{\alpha + 1},$$

so dafs sich ergiebt

$$\overset{z_1}{\underset{0}{F}} = \frac{(1 + z_1)^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1},$$

folglich, wenn man zum alten Koordinatensystem zurückkehrt,

$$\overset{y_1}{\underset{1}{F}} = \frac{y_1^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Bildet man dieselbe Formel für $\overset{y_2}{\underset{1}{F}}$, so findet man durch beiderseitige Subtraktion, wobei der Zusatz $\frac{1}{\alpha + 1}$ sich weghebt,

1) $$\overset{y_2}{\underset{y_1}{F}} = \frac{y_2^{\alpha + 1} - y_1^{\alpha + 1}}{\alpha + 1},$$

so dafs die ursprüngliche, für positive, ganze Exponenten geltende Formel für den Konvergenzbereich als bestehen bleibend nachgewiesen ist. Nur der Fall $\alpha = -1$ ist auszuschliefsen, weil er auf den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ führt. Dieser Fall ist mit Hülfe des natürlichen Logarithmus zu erledigen. (Method. Lehrbuch Band 3, Algebr. Analysis II.)

180) Der Konvergenzbereich kann aber durch beliebige Verschiebung des Koordinatensystems beliebig geändert werden.

Verschiebung um die Strecke 2 würde z. B. die Kurvengleichung geben:

$$x = y^\alpha = (2+z)^\alpha = 2^\alpha\left(1+\frac{z}{2}\right)^\alpha,$$

oder

$$x = 2^\alpha\left[1+\frac{\alpha}{1}\left(\frac{z}{2}\right)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{z}{2}\right)^3+\cdots\right],$$

die für $\frac{z}{2}$ absolut < 1 oder z absolut < 2 konvergiert. Die Schichtenformel giebt jetzt

$$\overset{z_1}{\underset{0}{F}} = 2^\alpha\left[\frac{z}{1}+\frac{\alpha}{1}\left(\frac{1}{2}\frac{z^2}{2}\right)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{4}\frac{z^3}{3}\right)+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{8}\frac{z^4}{4}\right)+\cdots\right].$$

Rechts und links multipliziere man mit $(\alpha+1)$ und aufserdem auf der rechten Seite oben und unten mit 2. Man erhält

$$(\alpha+1)\overset{z_1}{\underset{0}{F}} = 2^{\alpha+1}\left[\frac{\alpha+1}{1}\frac{z_1}{2}+\frac{(\alpha+1)\alpha}{1\cdot 2}\left(\frac{z_1}{2}\right)^2+\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{z_1}{2}\right)^2+\cdots\right]$$
$$= 2^{\alpha+1}\left[\left(1+\frac{z_1}{2}\right)^{\alpha+1}-1\right],$$

so dafs

$$\overset{z_1}{\underset{0}{F}} = \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left[\left(1+\frac{z_1}{2}\right)^{\alpha+1}-1\right] = \frac{1}{\alpha+1}[(2+z_1)^{\alpha+1}-2^{\alpha+1}]$$

und daher auch

$$\overset{y_1}{\underset{2}{F}} = \frac{1}{\alpha+1}\left[y_1^{\alpha+1}-2^{\alpha+1}\right]$$

ist. Daraus folgt ebenso, wie oben, mit Hülfe von $\overset{y_2}{\underset{2}{F}}$ und beiderseitiger Subtraktion

1) $$\overset{y_2}{\underset{y_1}{F}} = \frac{y_2^{\alpha+1}-y_1^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Die Formel 1) gilt also auch für den neuen Konvergenzbereich. Man kann auf diese Weise ihre Gültigkeit für die ganze positive reelle Achse nachweisen, vorausgesetzt, dafs α verschieden von -1 ist.

181) Kritisch sind nur die Stellen 0 und ∞. Darüber ist Folgendes zu sagen.

Ist $\alpha > -1$, so ist für $y_1 = 0$ der Werth von $\frac{y_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} = 0$. In diesem Falle wird

$$\overset{y_2}{\underset{0}{F}} = \frac{y_2^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{0}{\alpha+1} = \frac{y_2^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Folglich:

Für $\alpha > -1$ schneiden die Kurven den $(\alpha+1)^{\text{ten}}$ Teil des Rechtecks ab, möge nun α positiv (Fig. 140) oder negativ (Fig. 141) sein. So ist z. B. für $\alpha = -\frac{1}{2}$, also für die Kurve $x = y^{-\frac{1}{2}}$,

$$\overset{y}{\underset{0}{F}} = \frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\,y^{\frac{1}{2}},$$

was das Doppelte des Rechtecks bedeutet. Das Diagramm reicht dabei nach rechts bis $x = \infty$ und hat trotzdem endlichen Inhalt.

Fig. 140.

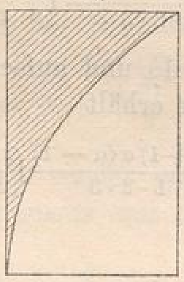
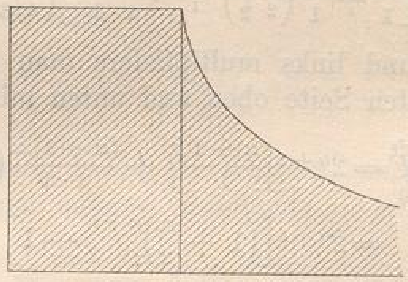
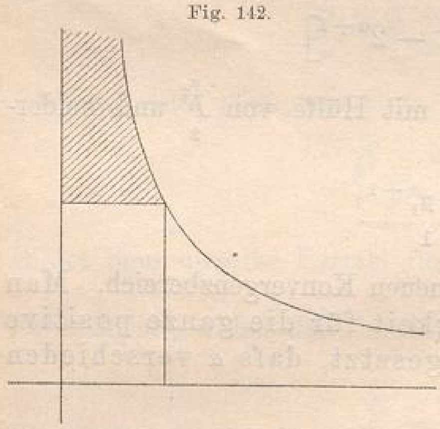


Fig. 141.



Ist dagegen $\alpha < -1$, so ist für $y_2 = \infty$ $y_2^{\alpha+1} = 0$, weil $\alpha + 1$ negativ ist, und die Formel geht über in

Fig. 142.



$$\overset{\infty}{\underset{y_1}{F}} = \frac{0}{\alpha+1} - \frac{y_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{-y_1^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

was positiv ist, weil der Nenner negativ ist. In diesem Falle ist also der nach oben bis ins Unendliche fortzusetzende schraffierte Flächenteil gleich dem $(\alpha+1)^{\text{ten}}$ Teil des Rechtecks, während der darunterliegende unendlich grofs werden würde. Also auch hier behält der Ausdruck: „$(\alpha+1)^{\text{ter}}$ Teil des Rechtecks“ einen bestimmten Sinn. Die Formel 1) aber bleibt für alle positiven y_1 und y_2 richtig, nur ist der Werth Null jetzt auszuschliefsen, denn das nach rechts gehende Diagramm ist jetzt von unendlich grofsem Inhalte.

182) Der Fall $\alpha = -1$ erledigt sich nach dem Meth. Lehrbuche Band 3, Algebr. Analysis II dadurch, dafs für die Kurve $x = \frac{1}{y}$

$$\overset{y}{\underset{0}{F}} = {}^{e}\lg y$$

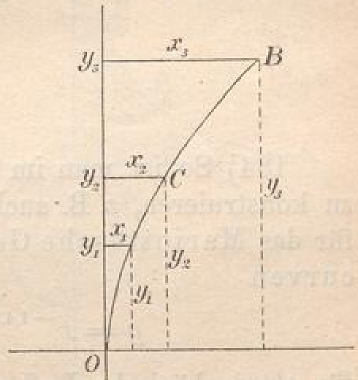
wird.

Damit ist die Angelegenheit für technische Zwecke überhaupt geklärt und ein weiterer Bereich für wichtige Anwendungen erschlossen.

183) Konstruktion der Parabeln höherer Ordnung.

Die Curven $x = y^\alpha$ für beliebiges reelles α einschliefslich des Falles $\alpha = -1$ haben eine einfache Konstruktionsmethode, die sich aus Folgendem ergiebt:

Fig. 143.



Ist x_2 mittlere Proportionale zu x_1 und x_3, also

$$x_1 : x_2 = x_2 : x_3,$$

so folgt aus der Kurvengleichung, dafs

$$y_1^\alpha : y_2^\alpha = y_2^\alpha : y_3^\alpha,$$

folglich auch

$$y_1 : y_2 = y_2 : y_3$$

ist. Also: Ist die mittlere Abscisse mittlere Proportionale zwischen den aufsenliegenden Abscissen, so ist auch die mittlere Ordinate mittlere Proportionale zwischen den aufsenliegenden Ordinaten.

Sind also von einer Parabel $x = y^\alpha$ zwei Punkte A und B bekannt, so kann man durch Eintragen mittlerer Proportionalen einen dritten Punkt C konstruieren, sodann zwischen A und C, C und B ebenfalls neue Punkte einschalten u. s. w.

Auch nach aufsen läfst sich die Curve fortsetzen. Da es sich dann um ein Fortschreiten nach geometrischer Weise handelt, so ergiebt sich folgender Konstruktionsmechanismus.

Sind in Fig. 144 A und B gegeben, so ziehe man beliebig OK und bilde durch Projektion AA_1A_2 und BB_1B_2. Zieht man A_2B_1, sodann parallel dazu B_2C_1, darauf im Zickzack C_1C_2, $C_2D_1 \parallel A_2B_1$, D_1D_2, $D_2E_1 \parallel A_2B_1$ u. s. w., so erhält man die in geometrischer Weise aufeinander folgenden Abscissen. Ebenso verfahre man in Bezug auf die beliebige Gerade OL mit $A\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $B\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ u. s. w., was die Ordinaten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$ u. s. w. giebt. Dadurch werden Punkte $C, D, E \ldots$ der Kurve bestimmt, die auch rückwärts fortgesetzt werden kann.