Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

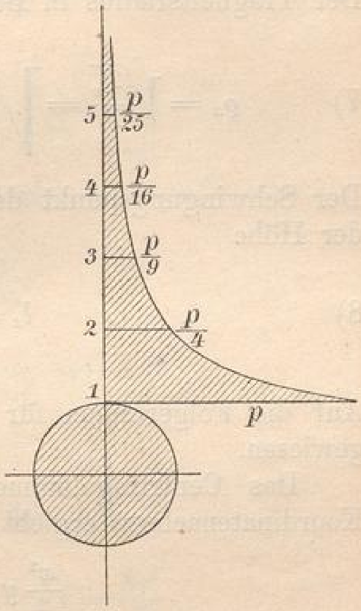
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Parabolische Berechnungen.

die Hebungsarbeit giebt, die z. B. erforderlich ist, einen Körper, der an der Erdoberfläche das Gewicht p hat, zu beliebiger Höhe zu heben. Die Diagrammfläche ist identisch mit der Potentialdifferenz. Auch hierbei vergl. das Methodische Lehrbuch 3, Algebr. Anal. V, c. Für die Elektrizitätslehre, wo es sich auch um Abstoſsung handeln kann, ist dies von fundamentaler Wichtigkeit. Vgl. Fig. 145.

Fig. 145.



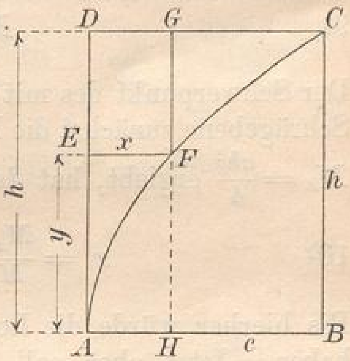
186) Parabolische Berechnungen. Es handelt sich hier um Parabeln höherer Ordnung. Willkürlich wird die gewöhnliche Parabel 2ter Ordnung als Beispiel herausgegriffen. Die Berechnung der übrigen geschieht ebenso. Zum Schluſs soll eine Tabelle über die verschiedenen Ordnungen aufgestellt werden.

In das Koordinatenrechteck $ABCD$ (Fig. 146) sei die Parabel

1) $$x = \frac{c}{h^2}\, y^2$$

einbeschrieben, die A zum Scheitel, AB zur Achse hat. Ihre Fläche ist

Fig. 146.



2) $$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{c}{h^2}\,\frac{h^3}{3} = \frac{ch}{3}.$$

Das statische Moment des Streifens 1) in Bezug auf die X-Achse ist $xy = \frac{c}{h^2}\, y^3$, das Moment der Gesamtfläche also:

3) $$M_x = \frac{c}{h^2}\,\frac{h^4}{4} = \frac{ch^2}{4}.$$

Demnach liegt der Schwerpunkt der Fläche ACD in der Höhe

4) $$y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\frac{ch^2}{4}}{\frac{ch}{3}} = \frac{3}{4}\, h.$$

Das Trägheitsmoment des Querschnittes 1) in Bezug auf die X-Achse ist $xy^2 = \frac{c}{h^2}\, y^4$, das der Gesamtfläche also:

5) $$T_x = \frac{c}{h^2}\,\frac{h^5}{5} = \frac{ch^3}{5}.$$

Für die wagerechte Schwerpunktsachse dagegen wird es

$$6)\qquad T_s = \frac{ch^3}{5} - h_s^2\, F = ch^3\left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{16}\right) = \frac{ch^3}{80}.$$

Der Trägheitsradius in Bezug auf AB ist

$$7)\qquad \varrho_x = \sqrt{\frac{T_x}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{ch^3}{5}}{\frac{ch^3}{3}}} = \sqrt{\tfrac{3}{5}h^2} = h\sqrt{\tfrac{3}{5}} = h\sqrt{0{,}6}.$$

Der Schwingungspunkt der Fläche ACD in Bezug auf AB liegt in der Höhe

$$8)\qquad l_x = \frac{T_x}{M_x} = \frac{\frac{ch^3}{5}}{\frac{ch^2}{4}} = \tfrac{4}{5}h.$$

Auf die Folgerungen für die Pendel- und Stofstheorie sei nur hingewiesen.

Das Centrifugalmoment des Streifens 1) in Bezug auf die Koordinatenachsen ergiebt sich nach Nr. 165 als

$$\frac{x^2}{2}y = \tfrac{1}{2}\frac{c^2}{h^4}y^4\, y = \frac{c^2}{2h^4}y^5.$$

Demnach ist für die Gesamtfläche ACD in Bezug auf jene Achse

$$9)\qquad M_{xy} = \frac{c^2}{2h^4}\frac{h^6}{6} = \frac{c^2h^2}{12}.$$

Der Schwerpunkt des mit Hülfe von AB abgeschrägten Körpers, dessen Schrägebene zunächst die Neigung 45° habe, dessen Inhalt sich dann aus $M_x = \frac{ch^2}{4}$ ergiebt, hat daher seine Projektion an der Stelle

$$10)\qquad x_s = \frac{M_{xy}}{M_x} = \tfrac{1}{3}c, \quad y_s = \frac{T_x}{M_x} = \tfrac{4}{5}h.$$

Bis hierher würde die Lehre von den ganzen Exponenten ausgereicht haben. Jetzt aber soll die Achse AD zu Grunde gelegt werden, wobei gebrochene Exponenten auftreten. Zunächst ergiebt sich der Querschnitt

$$11)\qquad q_x = HG - HF = h - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{1}{2}},$$

so dafs die Fläche wiederum wird

$$\frac{hc}{1} - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}}\frac{c^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = hc - \tfrac{2}{3}hc = \frac{ch}{3}.$$

Das statische Moment des Streifens 11) in Bezug auf AD ist

$$hx - \left(\frac{h}{c^{\frac{1}{2}}}\, x^{\frac{1}{2}}\right) x = hx - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}}\, x^{\frac{3}{2}}.$$

Daraus folgt für die Fläche das Moment

$$12) \qquad M_y = \frac{hc^2}{2} - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}} \frac{c^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = hc^2\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{5}\right) = \frac{hc^2}{10}.$$

Daraus ergiebt sich als Schwerpunktskoordinate

$$13) \qquad x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\frac{hc^2}{10}}{\frac{ch}{3}} = \tfrac{3}{10}\, c.$$

Das Trägheitsmoment des Streifens in Bezug auf AD ist

$$hx^2 - \left(\frac{h}{c^{\frac{1}{2}}}\, x^{\frac{1}{2}}\right) x^2 = hx^2 - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}}\, x^{\frac{5}{2}}.$$

Für die Fläche folgt als Trägheitsmoment für AD

$$14) \qquad T_y = \frac{hc^3}{3} - \frac{h}{c^{\frac{1}{2}}} \frac{c^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = hc^3\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{7}\right) = \frac{hc^3}{21}.$$

Für die senkrechte Schwerpunktsachse wird das Trägheitsmoment

$$15) \quad T_s' = \frac{hc^3}{21} - y_s^2\, F = \frac{hc^3}{21} - \frac{9c^2}{100}\frac{ch}{3} = hc^3\left(\tfrac{1}{21} - \tfrac{3}{100}\right) = \frac{37\, hc^3}{2100}.$$

Das polare Trägheitsmoment wird demnach

$$16) \quad T_p = T_s + T_s' = \frac{ch^3}{80} + \frac{37 hc^3}{2100} = \frac{ch}{16800} \cdot [210\, h^2 + 296\, c^2]$$

$$= \frac{ch}{8400}[105\, h^2 + 148\, c^2].$$

Der polare Trägheitsradius wird

$$17) \quad \varrho_p = \sqrt{\frac{T_p}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{ch}{8400}[105\, h^2 + 148\, c^2]}{\frac{ch}{3}}} = \sqrt{\frac{105\, h^2 + 148\, c^2}{2800}}.$$

Der Trägheitsradius in Bezug auf AD wird

$$18) \qquad \varrho_y = \sqrt{\frac{T_y}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{hc^3}{21}}{\frac{hc}{3}}} = \sqrt{\frac{c^2}{7}} = c\sqrt{\tfrac{1}{7}}.$$

Der mittels AD abgeschrägte Körper hat die Schwerpunktsprojektion an der Stelle

19) $$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{h c^3}{21}}{\frac{h c^2}{10}} = \frac{10}{21} c, \quad y_s = \frac{M_{xy}}{M_y} = \frac{\frac{h^2 c^2}{12}}{\frac{h c^2}{10}} = \frac{5}{6} h.$$

Auch der Schwingungspunkt der Fläche in Bezug auf AD liegt in der Entfernung

$$l_y = \frac{T_y}{M_y} = \frac{\frac{h c^3}{21}}{\frac{h c^2}{10}} = \frac{10}{21} c.$$

Die übrigen physikalischen Deutungen sind den früheren Bemerkungen entsprechend.

Durch Drehung um AD entsteht ein parabolischer Körper, dessen Querschnittsformel ist

20) $$q_y = x^2 \pi = \frac{c^2}{h^4} y^4 \pi,$$

dessen Inhalt also wird

21) $$J = \frac{c^2 \pi}{h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{c^2 \pi h}{5},$$

was den fünften Teil des zugehörigen Cylinders bedeutet.

Das statische Moment des Schnittes 20) in Bezug auf die Grundfläche ist

$$q_y \cdot y = x^2 \pi y = \frac{c^2 \pi}{h^4} y^5,$$

das Moment des Körpers wird also

22) $$M_u = \frac{c^2 \pi}{h^4} \frac{h^6}{6} = \frac{c^2 \pi h^2}{6}.$$

Der Schwerpunkt des Körpers liegt also in der Höhe

23) $$h_s = \frac{M_u}{J} = \frac{\frac{c^2 \pi h^2}{6}}{\frac{c^2 \pi h}{5}} = \frac{5}{6} h.$$

Das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Grundfläche ist aus

$$x^2 \pi y^2 = \frac{c^2 \pi}{h^4} y^4 y^2 = \frac{c^2 \pi}{h^4} y^6$$

zu berechnen als

24) $$T_u = \frac{c^2 \pi}{h^4} \frac{h^7}{7} = \frac{c^2 \pi h^3}{7}.$$

Das Trägheitsmoment jeder Schicht in Bezug auf Achse AD ist

$$\frac{x^4 \pi}{2} = \frac{1}{2} \frac{c^4 \pi}{h^8} y^8,$$

das des ganzen Körpers also

25) $$T = \frac{1}{2} \frac{c^4}{h^8} \frac{\pi h^9}{9} = \frac{c^4 \pi h}{18}.$$

In Bezug auf jeden Hauptschnitt durch T ist es halb so grofs, also

$$T_1 = \frac{c^4 \pi h}{36}, \tag{26}$$

in Bezug auf die Gerade AB also

$$T' = T_1 + T_u = \frac{c^4 \pi h}{36} + \frac{c^2 \pi h^3}{7} = \frac{c^2 \pi}{252}(7\,c^2 + 36\,h^2).$$

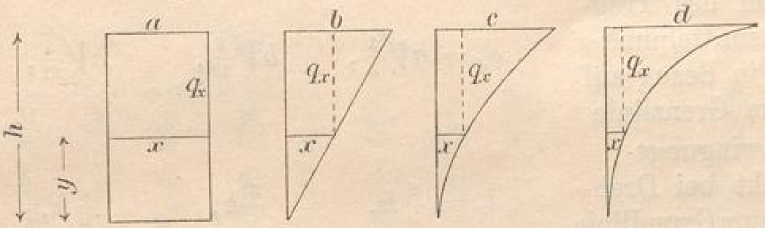
Auf sonstige physikalische Dinge sei nur hingedeutet. Ebenso leicht ist der durch Drehung um AB entstehende Körper zu behandeln.

187) Macht man entsprechende Betrachtungen für die aufeinander folgenden Parabeln höherer Ordnung, so ergiebt sich die nachstehende Tabelle. Betrachtet man die nach rechts aufeinander folgenden Ausdrücke, so zeigt sich, dafs die entsprechenden Zahlen nach einfachen arithmetischen Reihen aufeinander folgen. Man kann also nicht nur für die ganzen Exponenten alles ohne weiteres hinschreiben, sondern auch für die zwischenliegenden gebrochenen Exponenten leichte Interpolationen machen. Damit ist die Theorie für die einfachen Parabeln höherer Ordnung erledigt.

188) Tabelle über Parabeln höherer Ordnung.

Fig. 147.

Parabel	0ter Ordnung	1ter Ordnung	2ter Ordnung	3ter Ordnung	...



a) Parabolische Flächen.

Querschnitt in Höhe y	$x = a$,	$\frac{b}{h} y$,	$\frac{c}{h^2} y^2$,	$\frac{d}{h^3} y^3$,	...
1. Fläche von $y = 0$ bis $y = h$	$\overset{h}{\underset{0}{F}} = \frac{ah}{1}$,	$\frac{bh}{2}$,	$\frac{ch}{3}$,	$\frac{dh}{4}$,	...
2. statisches Moment in Bezug auf Grundlinie	$M_x = \frac{ah^2}{2}$,	$\frac{bh^2}{3}$,	$\frac{ch^2}{4}$,	$\frac{dh^2}{5}$,	...
3. Trägheitsmoment für Grundlinie	$T_x = \frac{ah^3}{3}$,	$\frac{bh^3}{4}$	$\frac{ch^3}{5}$,	$\frac{dh^3}{6}$,	...