Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Die gleichseitige Hyperbel, ihre Fläche und ihre verschiedenen Momente.

Folglich ist in Bezug auf OY

$$M_y = AS_1 \cdot F_1 + AS_2 \cdot F_2 = \frac{9}{5} a \cdot 4a^2 + \frac{3a}{4\pi}(4\pi + 1)\frac{a^2\pi}{2}$$

$$= \frac{36a^3}{5} + \frac{3a^3(4\pi+1)}{8} = \frac{a^3}{40}[288 + 15(4\pi+1)] = \frac{a^3}{40}[303 + 60\pi].$$

Folglich

$$AS = e_s = \frac{M_y}{F_1 + F_2} = \frac{\frac{a^3}{40}[303 + 60\pi]}{4a^2 + \frac{a^2\pi}{2}} = \frac{a[303 + 60\pi]}{20(8 + \pi)}.$$

Für die Parabel ist in Bezug auf HJ

$$T_s' = \frac{8hc^3}{175} = \frac{8 \cdot 2a \cdot (3a)^3}{175} = \frac{432a^4}{175}.$$

Verschoben mufs werden um $S_1 S = e_s - \frac{9}{5} a$. Demnach ist in Bezug auf HE

$$T' = \frac{432a^4}{175} + \left(e_s - \frac{9}{5} a\right)^2 4a^2.$$

Für den Kreis ist in Bezug auf KL

$$T_s'' = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) = a^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right).$$

Verschoben wird um $SS_2 = AS_2 - e_s = \frac{3a}{4\pi}(4\pi + 1) - e_s$. Demnach ist in Bezug auf HE

$$T'' = a^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) + \left[\frac{3a}{4\pi}(4\pi + 1) - e_s\right]^2 \frac{a^2\pi}{2}.$$

Das gesuchte Trägheitsmoment ist

$$T = T' + T''.$$

Die numerische Ausrechnung für einen beliebigen Wert von a macht keine Schwierigkeiten.

194) Die gleichseitige Hyperbel $x = \frac{1}{y}$.

Der Querschnitt ist $x = \frac{1}{y}$, demnach wird die Fläche von 1 bis y

$$\overset{y}{\underset{1}{F}} = {}^{e}\lg y.$$

Das statische Moment des Querschnitts in Bezug auf die X-Achse ist $xy = \frac{1}{y} y = 1$, folglich für die Fläche von 0 bis y

$$M_x = \frac{y}{1},$$

obwohl diese Fläche sich nach rechts ins Unendliche erstreckt. Für die Fläche von 1 bis y ist

$$M_x = \frac{y}{1} - \frac{1}{1} = y - 1.$$

Die Schwerpunktshöhe der letzteren Fläche ist also

$$y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{y-1}{{}^e\lg y}.$$

Dagegen ist das statische Moment in Bezug auf die Y-Achse mit Hülfe der Querschnittsformel

$$q_y = x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2y^2} = \tfrac{1}{2}\, y^{-2}$$

zu berechnen. Für die Fläche von $y = 1$ bis y ergiebt sich

$$M_y = \tfrac{1}{2}\,\frac{y^{-1}}{-1} - \tfrac{1}{2}\,\frac{1^{-1}}{-1} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{y}\right) = \frac{y-1}{2\,y},$$

so dafs ihre andere Schwerpunktskoordinate wird

$$x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{y}\right)}{{}^e\lg y} = \frac{y-1}{2\,y\,{}^e\lg y}.$$

Das Trägheitsmoment T_x entspringt der Querschnittsformel

$$q_y = x \cdot y^2 = \frac{1}{y}\, y^2 = y,$$

demnach wird für die Fläche von 0 bis y

$$\overset{y}{\underset{0}{T}} = \frac{y^2}{2}, \text{ dagegen } \overset{y}{\underset{1}{T}} = \tfrac{1}{2}(y^2 - 1).$$

Der Trägheitsradius der Fläche von 1 bis y wird

$$\varrho_x = \sqrt{\frac{\overset{y}{\underset{1}{T}}}{\overset{y}{\underset{1}{F}}}} = \sqrt{\frac{\tfrac{1}{2}(y^2-1)}{{}^e\lg y}} = \sqrt{\frac{y^2-1}{2\,{}^e\lg y}},$$

der Schwingungspunkt liegt für die Fläche von 1 bis y in der Höhe

$$y_m = \frac{\tfrac{1}{2}(y^2-1)}{y-1} = \tfrac{1}{2}(y+1),$$

für die Fläche von 0 bis y in der Höhe

$$y_m = \frac{\frac{y^2}{2}}{\frac{y}{1}} = \frac{y}{2}.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Y-Achse ist aus

$$q_y = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{y^3} = \frac{1}{3}y^{-3}$$

abzuleiten. Es ergiebt sich für die Fläche von 1 bis y

$$T_y = \frac{1}{3}\frac{y^{-2}}{-2} - \frac{1}{3}\frac{1^{-2}}{-2} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) = \frac{y^2-1}{6\,y^2}.$$

Der entsprechende Trägheitsradius ist

$$\varrho_y = \sqrt{\frac{T_y}{F}} = \sqrt{\frac{y^2-1}{6\,y^{2\,e}\lg y}},$$

der entsprechende Schwingungspunkt

$$x_s = \frac{T_y}{M_y} = \frac{y^2-1}{6\,y^2}\cdot\frac{2\,y}{y-1} = \frac{y+1}{3\,y}$$

Das Centrifugalmoment in Bezug auf beide Achsen ist aus der Querschnittsformel

$$q_y = \frac{x^2}{2}y = \frac{1}{2}\frac{1}{y^2}y = \frac{1}{2\,y}$$

zu berechnen.

Für die Fläche von 1 bis y ergiebt sich

$$M_{xy} = \tfrac{1}{2}\,{}^e\lg y - \tfrac{1}{2}\,{}^e\lg 1 = \tfrac{1}{2}\,{}^e\lg y.$$

Auch für ein Segment dieser Hyperbel, welches durch eine Gerade von -45^0 abgeschnitten wird, lassen sich alle diese Berechnungen durchführen, indem man vom ganzen Dreieck die entsprechenden Teile abzieht.

Dreht sich die Hyperbel um die Y-Achse, so wird der Querschnitt des entstehenden Körpers

$$q_y = x^2\pi = \frac{\pi}{y^2} = \pi y^{-2},$$

demnach wird der Inhalt von 1 bis y

$$\overset{y}{\underset{1}{J}} = \pi\left(\frac{y^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1}\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{y}\right) = \frac{\pi\,(y-1)}{y},$$

z. B.

$$\overset{\infty}{\underset{1}{J}} = \pi\left(1 - \frac{1}{\infty}\right) = \pi.$$

Das statische Moment für die Grundfläche wird aus

$$q_y = x^2\pi\cdot y = \frac{\pi}{y^2}y = \frac{\pi}{y}$$

berechnet als

$$\overset{y}{\underset{1}{M}} = \pi\,{}^e\lg y.$$

Das Trägheitsmoment für die Grundfläche wird nach $q_y = \frac{\pi}{y} y = \pi$

$$\overset{y}{\underset{1}{T}} = \pi \left(\frac{y}{1} - \frac{1}{1} \right) = \pi (y - 1),$$

bezw.

$$\overset{y}{\underset{0}{T}} = \pi y.$$

Sein Trägheitsmoment für die Y-Achse folgt aus $q_y = \frac{x^4 \pi}{2} = \frac{\pi}{2 y^4}$ als

$$\overset{y}{\underset{1}{T}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{y^{-3}}{-3} - \frac{1^{-3}}{-3} \right) = \frac{\pi}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{y^3} \right),$$

z. B.

$$\overset{\infty}{\underset{1}{T}} = \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{1}{\infty^3} \right) = \frac{\pi}{6} \cdot$$

195) Beispiel der Gravitationskurve $x = \frac{1}{y^2} \cdot$

Querschnitt $q_y = \frac{1}{y^2}$, sein statisches Moment für die X-Achse $xy = \frac{1}{y}$, sein Trägheitsmoment für dieselbe $xy^2 = 1$. Folglich

$$\overset{y}{\underset{1}{F}} = \frac{y^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1} = 1 - \frac{1}{y} = \frac{y - 1}{y},$$

z. B.

$$\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1.$$

Statisches Moment

$$\overset{y}{\underset{1}{M}} = {}^e\lg y,$$

Trägheitsmoment

$$\overset{y}{\underset{1}{T}} = \frac{y}{1} - \frac{1}{1} = y - 1.$$

Das statische Moment für die Y-Achse folgt aus $q_y = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2 y^4}$ als

$${}^y_1 M_y = \frac{1}{2} \left(\frac{y^{-3}}{-3} - \frac{1^{-3}}{-3} \right) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{y^3} \right),$$

das Trägheitsmoment aus $q_y = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3 y^6}$ als

$${}^y_1 T_y = \frac{1}{3} \left(\frac{y^{-5}}{-5} - \frac{1^{-5}}{-5} \right) = \frac{1}{15} \left(1 - \frac{1}{y^5} \right).$$

Auf die Bedeutung für die kosmische Physik und die Potentialtheorie sei im Anschlufs an das Methodische Lehrbuch aufmerksam gemacht.