Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

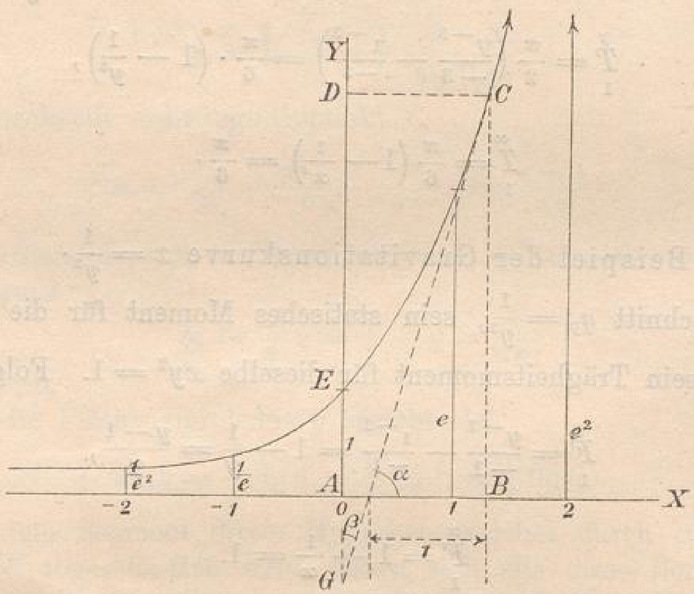
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Die logarithmische Linie, Fläche und Momente.

195b) Ein transcendentes Beispiel. Nicht der technischen Wichtigkeit halber, sondern um zu zeigen, wie man transcendente Kurven aller Art, z. B. auch die Sinuskurve, die Cosinuskurve, die Kettenlinie $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ u. s. w. behandeln kann, soll die logarithmische Linie $y = e^x$ oder $x = {}^e\lg y$ als Beispiel eingehender untersucht werden. In Fig. 149 b ist sie dargestellt.

Fig. 149 b.



Zunächst folgt aus

1) $$y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

nach Nr. 170, dafs die Neigung α der in dem Kurvenpunkte x, y angelegten Tangente sich aus

$$\tan\alpha = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$$

berechnet also aus

2) $$\tan\alpha = e^x = y = \frac{y}{1}.$$

Demnach ist die Projektion der in C angelegten Tangente stets gleich 1, wo auch C auf der Kurve liege. Die Tangente in C wird also konstruiert, indem man das Lot CB fällt, von B aus nach links die Strecke 1 abträgt und den freien Endpunkt mit C verbindet.

Für die Fläche $ABCE$ folgt nach der Schichtenformel aus 1

$$\overset{x}{\underset{0}{F}} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1!\,2} + \frac{x^3}{2!\,3} + \frac{x^4}{3!\,4} + \cdots = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

oder

3) $$\overset{x}{\underset{0}{F}} = e^x - 1.$$

So ist z. B.

$$\overset{0}{\underset{-\infty}{F}} = 1 - e^{-\infty} = 1.$$

In Fig. 149 b ist für jedes Lot $BC = y = e^x$ das statische Moment in Bezug auf die Y-Achse

$$yx = e^x x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots,$$

folglich ist das statische Moment der Fläche $ABCE$ in Bezug auf die Y-Achse

$$M_y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^4}{2!\,4} + \frac{x^5}{3!\,5} + \cdots$$

oder

$$M_y = x^2\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + x^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + x^4\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots$$

$$= x\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

$$= x(e^x - 1) - \left(e^x - 1 - \frac{x}{1!}\right) = xe^x - e^x + 1 - x + x = xe^x - e^x + 1,$$

also

4) $$M_y = e^x(x - 1) + 1.$$

Das Trägheitsmoment der Geraden BC in Bezug auf die Y-Achse ist

$$e^x \,.\, x^2 = x^2 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots,$$

so dafs für die Fläche von 0 bis x wird

$$T_y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{1!\,4} + \frac{x^5}{2!\,5} + \frac{x^6}{3!\,6} + \cdots.$$

Nun ist aber der Reihe nach

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{1!} - 2\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)$$

$$\frac{1}{1!\,4} = \frac{1}{2!} - 2\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right)$$

$$\frac{1}{2!\,5} = \frac{1}{3!} - 2\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$$

u. s. w. Folglich ist

$$T_y = x^3\left(\frac{1}{1!}-\frac{2}{2!}+\frac{2}{3!}\right)+x^4\left(\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}+\frac{2}{4!}\right)+x^5\left(\frac{1}{3!}-\frac{2}{4!}+\frac{2}{5!}\right)+\cdots$$

$$= x^2\left[\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right]-2x\left[\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right]$$

$$+2\left[\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right]=x^2(e^x-1)-2x\left(e^x-1-\frac{x}{1!}\right)$$

$$+2\left[e^x-1-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}\right]=e^x(x^2-2x+2)-x^2+2x^2-\frac{2x^2}{2}$$

$$+2x-2x-2=e^x(x^2-2x+2)-2,$$

oder endlich

5) $$T_y = e^x(x^2-2x+2)-2.$$

Das statische Moment M_x in Bezug auf die X-Achse ist zu behandeln mit Hülfe der Querschnittsformel

$$q_x = e^x\cdot\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}e^{2x}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{16x^4}{4!}+\cdots\right].$$

Für die Fläche von 0 bis x giebt dies

$$M_x = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1}+\frac{2x^2}{1!\,2}+\frac{4x^3}{2!\,3}+\frac{8x^4}{3!\,4}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{16x^4}{4!}+\cdots\right]$$

oder

6) $$M_x = \frac{1}{4}\left[e^{2x}-1\right].$$

Das Trägheitsmoment T_x verlangt die Behandlung der Querschnittsformel

$$q_x = \frac{(e^x)^3}{3}=\frac{e^{3x}}{3}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{3x}{1!}+\frac{9x^2}{2!}+\frac{27x^3}{3!}+\frac{81x^4}{4!}+\cdots\right].$$

Für die Fläche von 0 bis x giebt dies

$$T_x = \frac{1}{3}\left[\frac{x}{1}+\frac{3x^2}{1!\,2}+\frac{9x^3}{2!\,3}+\frac{27x^4}{3!\,4}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{3x}{1!}+\frac{9x^2}{2!}+\frac{27x^3}{3!}+\frac{81x^4}{4!}+\cdots\right]$$

oder

7) $$T_x = \frac{1}{9}\left[e^{3x}-1\right].$$

Für den Schwerpunkt der Fläche $ABCE$ folgen die Koordinaten

8) $$x_s = \frac{M_y}{F}=\frac{e^x(x-1)+1}{e^x-1},\quad y_s=\frac{M_x}{F}=\frac{\frac{1}{4}(e^{2x}-1)}{e^x-1}=\frac{1}{4}(e^x+1).$$

Die Trägheitsradien in Bezug auf die beiden Achsen sind

9) $$\varrho_y = \sqrt{\frac{T_y}{F}} = \sqrt{\frac{e^x(x^2 - 2x + 2) - 2}{e^x - 1}},$$

$$\varrho_x = \sqrt{\frac{T_x}{F}} = \sqrt{\frac{1}{9}\,\frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1}}.$$

Die Abstände der Schwingungspunkte in Bezug auf beide Achsen sind

10) $$x_m = \frac{T_y}{M_y} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2) - 2}{e^x(x - 1) - 1},$$

$$y_m = \frac{T_x}{M_x} = \frac{\frac{1}{9}(e^{3x} - 1)}{\frac{1}{4}(e^{2x} - 1)} = \frac{4}{9}\,\frac{e^{3x} - 1}{e^{2x} - 1}.$$

Auch das Centrifugalmoment M_{xy} in Bezug auf beide Achsen läſst sich berechnen. Die entsprechende Querschnittsformel ist

$$\frac{(e^x)^2}{2}x = \frac{xe^{2x}}{2} = \frac{x}{2}\left[1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots\right]$$

oder

$$q_x = \frac{1}{2}\left[x + \frac{2x^2}{1!} + \frac{4x^3}{2!} + \frac{8x^4}{3!} + \frac{16x^5}{4!} + \cdots\right].$$

Daraus folgt für die Fläche von 0 bis x

$$M_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{1!\,3} + \frac{4x^4}{2!\,4} + \frac{8x^5}{3!\,5} + \frac{16x^6}{4!\,6} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{1!\,3} + \frac{(2x)^4}{2!\,4} + \frac{(2x)^5}{3!\,5} + \frac{(2x)^6}{4!\,6} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(2x)^2\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + (2x)^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + (2x)^4\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right)\cdots\right]$$

oder, getrennt geschrieben:

$$M_{xy} = \frac{2x}{8}\left[\frac{(2x)}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots\right] - \frac{1}{8}\left[\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots\right],$$

oder

11) $$M_{xy} = \frac{2x}{8}\left[e^{2x} - 1\right] - \frac{1}{8}\left[e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1}\right]$$

$$= \frac{e^{2x}}{8}\left[2x - 1\right] - \frac{1}{8}\left[2x - 2x - 1\right] = \frac{e^{2x}}{8}\left[2x - 1\right] + \frac{1}{8}.$$

In gleicher Weise läſst sich dieselbe Kurve mit Hülfe der Gleichung

$$x = {}^e\lg y,$$

oder, indem man den Nullpunkt um die Strecke 1 nach oben verschiebt, mit Hülfe von

12) $$x = \lg(1 + z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

behandeln. Man kann aber die obigen Resultate von den zum Rechteck $ABCD$ gehörigen abziehen und so das Nötige für die Fläche CDE sofort hinschreiben. So ist z. B.

13) $$F' = \overset{y}{\underset{1}{F}} = xe^x - (e^x - 1) = e^x(x-1) + 1 = y(\lg y - 1) + 1$$

Die Behandlung der Reihe 12) würde auf $(1+z)[\lg(1+z) - 1] + 1$ führen. Man achte darauf, dafs die Formeln für F' und M_y identisch sind.

Das statische Moment von CDE für die Y-Achse wird

$$M'_y = (xe^x)\frac{x}{2} - [e^x(x-1) + 1] = e^x\left[\frac{x^2}{2} - x + 1\right] - 1$$
$$= y\left[\tfrac{1}{2}\lg y)^2 - \lg y + 1\right] - 1.$$

Man achte darauf, dafs dies die Hälfte von T_y ist.

Das Trägheitsmoment für die Y-Achse wird

$$T'_y = \frac{e^x x^3}{3} - [e^x(x^2 - 2x + 2) - 2] = e^x\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 2\right] + 2$$
$$= y\left[\tfrac{1}{3}(\lg y)^3 - (\lg y)^2 + 2\lg y - 2\right] + 2.$$

Als statisches Moment für die X-Achse findet man

$$M'_x = (xe^x)\frac{e^x}{2} - \tfrac{1}{4}[e^{2x} - 1] = e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \tfrac{1}{4}\right) + 1 = y^2\left[\tfrac{1}{2}\lg y - \tfrac{1}{4}\right] + 1,$$

als Trägheitsmoment für die X-Achse

$$T'_x = \frac{x(e^x)^3}{3} - \tfrac{1}{9}[e^{3x} - 1] = e^{3x}\left[\frac{x}{3} - \tfrac{1}{9}\right] + 1 = y^3\left[\tfrac{1}{3}\lg y - \tfrac{1}{9}\right] + 1.$$

Das Centrifugalmoment von CDE für beide Achsen wird

$$M'_{xy} = \frac{x^2(e^x)^2}{4} - \frac{e^{2x}}{8}(2x - 1) + \tfrac{1}{8} = \frac{e^{2x}}{8}[2x^2 - 2x + 1] + \tfrac{1}{8}$$
$$= \frac{y^2}{8}[2(\lg y)^2 - 2\lg y + 1] + \tfrac{1}{8}.$$

Der Schwerpunkt der Fläche CDE hat die Koordinaten

$$x_s = \frac{M'_y}{F'} = \frac{e^x\left[\frac{x^2}{2} - x + 1\right] - 1}{e^x[x-1] + 1} = \frac{y\left[\frac{1}{2}(\lg y)^2 - \lg y + 1\right] - 1}{y[\lg y - 1] + 1},$$

$$y_s = \frac{M'_x}{F'} = \frac{e^{2x}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right] + 1}{e^x[x-1] + 1} = \frac{y^2\left[\frac{1}{2}\lg y - \frac{1}{4}\right] + 1}{y[\lg y - 1] + 1}.$$

Die Trägheitsradien sind

$$\varrho_y = \sqrt{\frac{T'_y}{F'}} = \sqrt{\frac{e^x\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 2\right] + 2}{e^x[x-1]+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{y\left[\frac{1}{3}(\lg y)^3 - (\lg y)^2 + 2\lg y - 2\right] + 2}{y[\lg y - 1] + 1}},$$

$$\varrho_x = \sqrt{\frac{T'_x}{F'}} = \sqrt{\frac{e^{3x}\left[\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right] + 1}{e^x[x-1]+1}} = \sqrt{\frac{y^3\left[\frac{1}{3}\lg y - \frac{1}{9}\right] + 1}{y[\lg y - 1] + 1}}.$$

Die Schwingungspunkte in Bezug auf beide Achsen sind

$$y_m = \frac{T'_y}{M'_y} = \frac{e^x\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 2\right] + 2}{e^x\left[\frac{x^2}{2} - x + 1\right] - 1}$$

$$= \frac{y\left[\frac{1}{3}(\lg y)^3 - \lg(y)^2 + 2\lg y - 2\right] + 2}{y\left[\frac{1}{2}(\lg y)^2 - \lg y + 1\right] - 1},$$

$$x_m = \frac{T'_x}{M'_x} = \frac{e^{3x}\left[\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right] + 1}{e^{2x}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right] + 1} = \frac{y^3\left[\frac{1}{3}\lg y - \frac{1}{9}\right] + 1}{y^2\left[\frac{1}{2}\lg y - \frac{1}{4}\right] + 1}.$$

Auf die mit $\frac{M_{xy}}{M_x}$, $\frac{M_{xy}}{M_y}$, $\frac{M'_{xy}}{M'_x}$ und $\frac{M'_{xy}}{M'_y}$ zusammenhängenden physikalischen Dinge braucht nur hingewiesen zu werden.

Auch der durch Drehung um die X-Achse aus der Kurve $y = e^x$ entstehende Körper läſst sich nach jeder Richtung bequem berechnen. Denn Querschnitt

$$q_x = y^2\pi = e^{2x}\pi = \pi\left[1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots\right],$$

folglich Inhalt

$$\overset{x}{\underset{0}{J}} = \pi\left[\frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \frac{8x^4}{4!} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots\right]$$

oder

$$\overset{x}{\underset{0}{J}} = \frac{\pi}{2}\left[e^{2x} - 1\right].$$

Sein statisches Moment in Bezug auf die durch die Y-Achse dargestellte Ebene ist aus der Querschnittsformel

$$q_x = xy^2\pi = xe^{2x}\pi = \pi x\left[1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \cdots\right]$$
$$= \pi\left[x + \frac{2x^2}{1!} + \frac{4x^3}{2!} + \frac{8x^4}{3!} + \cdots\right]$$

zu berechnen. Es ergiebt sich

$$\overset{x}{\underset{0}{M}} = \pi\left[\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{1!\,3} + \frac{4x^4}{2!\,4} + \frac{8x^5}{3!\,5} + \cdots\right]$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{1!\,3} + \frac{16x^4}{2!\,4} + \frac{32x^5}{3!\,5} + \cdots\right]$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[(2x)^2\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + (2x)^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + (2x)^4\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots\right]$$
$$= \frac{2x\pi}{4}\left[\frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots\right] - \frac{\pi}{4}\left[\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots\right]$$
$$= \frac{2x\pi}{4}[e^{2x} - 1] - \frac{\pi}{4}\left[e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1}\right] = \frac{\pi e^{2x}}{4}[2x - 1] - \frac{\pi}{4}[2x - 1 - 2x]$$

oder endlich

$$\overset{x}{\underset{0}{M}} = \frac{\pi e^{2x}}{4}[2x - 1] + \frac{\pi}{4}.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Ebene folgt aus der Querschnittsformel

$$q_x = y^2\pi x^2 = \pi x^2 e^{2x} = \pi x^2\left[1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \cdots\right]$$
$$= \pi\left[x^2 + \frac{2x^3}{1!} + \frac{4x^4}{2!} + \frac{8x^5}{4!} + \cdots\right].$$

Es folgt

$$\overset{x}{\underset{0}{T}} = \pi\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{1!\,4} + \frac{4x^5}{2!\,5} + \frac{8x^6}{4!\,6} + \cdots\right].$$

Die Zerlegung in Nr. 195 giebt

$$\overset{x}{\underset{0}{T}} = \frac{\pi}{8}\left[(2x)^3\left(\frac{1}{1!} - \frac{2}{2!} + \frac{2}{3!}\right) + (2x)^4\left(\frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} + \frac{2}{4!}\right) + (2x)^5\left(\frac{1}{3!} - \frac{2}{4!} + \frac{2}{5!}\right) + \cdots\right]$$
$$= \frac{\pi}{8}(2x)^2\left[\frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots\right] - \frac{2\pi}{8}(2x)\left[\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots\right]$$
$$+ \frac{2\pi}{8}\left[\frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \cdots\right]$$
$$= \frac{2x^2\pi}{4}[e^{2x} - 1] - \frac{2x\pi}{4}\left[e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1}\right] + \frac{\pi}{4}\left[e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1} - \frac{4x^2}{2}\right]$$
$$= \frac{\pi}{4}e^{2x}[2x^2 - 2x + 1] - \frac{\pi}{4}[2x^2 - 2x - 4x^2 + 1 + 2x + 4x^2]$$
$$= \frac{\pi}{4}e^{2x}[2x^2 - 2x + 1] - \frac{\pi}{4}[2x^2 + 1].$$

Der durch Drehung um die Y-Achse entstehende Körper kann mit Hülfe der Querschnittsformel

$$x^2\pi = \pi\,[\lg(1+z)]^2 = \pi\left[\frac{z^1}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots\right]^2$$

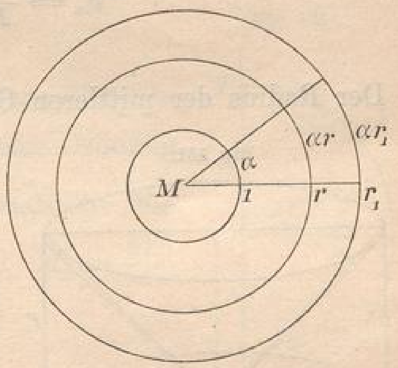
behandelt werden. Einfacher geschieht die Berechnung jedes seiner beiden Teile, indem man von dem durch Drehung des Rechtecks $ABCD$ entstehenden Cylinder den vorher berechneten Körper abzieht. Ebenso verfährt man mit dem statischen und dem Trägheits-Momente.

Damit kann die Untersuchung von $y = e^x$ und $x = {}^e\lg y$ abgeschlossen und als Beispiel für die Behandlung anderer transcendenter Kurven hingestellt werden.

D. Die Schichtenformel für Kreisbogen.

196) Die Tragweite der Schichtenformel läfst sich dadurch erweitern, dafs man sie auch auf concentrische Kreisbogen anwendet. Ein Beispiel wird dies klären.

Fig. 150.



Kreisbogen und Kreisfläche. Die Kreislinie von Radius r hat den Umfang $2r\pi$. Ihre sämtlichen Punkte haben vom Centrum die Entfernung r. Während also

$$q_r = 2r\pi$$

als Querschnitt aufzufassen ist, kann man

$$q_r = (2r\pi)r = 2r^2\pi$$

als Polarmoment erster Ordnung,

$$q_r = (2r\pi)r^2 = 2r^3\pi$$

als Polarmoment zweiter Ordnung betrachten.

Demnach wird die Fläche des Kreises von 0 bis r

$$\overset{r}{\underset{0}{F}} = 2\pi\frac{r^2}{2} = r^2\pi,$$

das Polarmoment erster Ordnung der Kreisfläche

$$M_p = \frac{2\pi r^3}{3},$$

das Polarmoment zweiter Ordnung der Kreisfläche

$$T_p = \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{2}.$$

Letzteres ist das polare Trägheitsmoment.