Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 35. Der Hebel. Beispiel 140-141

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

138. Ein 300 kg schwerer Körper soll mittels zweier, je 20 kg schwerer, hölzerner Walzen und auf denselben liegender Holzplatte, deren Gewicht in dem Körpergewicht einbegriffen ist, auf Steinpflaster fortgeschafft werden. Wie groß muß die an der Platte wirkende, horizontale Kraft P sein, wenn der Hebelarm der rollenden Reibung zwischen Holz und Steinpflaster 0,75 und derjenige zwischen Holz und Holz 0,1 cm ist?

Auflösung: Die Reibung zwischen Platte und Walzen ist

$$P_1 = \frac{0,1}{15} \cdot 300$$

Die Reibung zwischen Walzen und Unterlage wird

$$P_2 = \frac{0,75}{15} \cdot (300 + 40)$$

Demnach ergibt sich

$$P = P_1 + P_2 = \frac{0,1}{15} \cdot 300 + \frac{0,75}{15} \cdot 340$$

$$P = 2 + 0,05 \cdot 340$$

$$\boldsymbol{P \sim 19 \text{ kg}}$$

139. Welche Zugkraft ist notwendig, um einen Wagen, welcher samt Belastung 2500 kg wiegt, auf chaussierter Straße (in gutem Zustande) fortzubewegen? $k = 0,023$.

Auflösung: $P = 0,023 \cdot 2500$

$$\boldsymbol{P \sim 57 \text{ kg}}$$

§ 35. Der Hebel.

Unter einem Hebel versteht man eine unbiegsame Stange, welche von mehreren Kräften um einen Punkt, den sogenannten **Unterstützungspunkt**, gedreht wird. Unter **Hebelarm** versteht man die Entfernung des Angriffspunktes einer Kraft vom Unterstützungspunkte. Ein **mathematischer Hebel** ist ein solcher, dessen Gewicht als Null angenommen wird; ein **physischer Hebel** ein solcher, dessen Gewicht berücksichtigt werden muß. Ein **einarmiger Hebel**, Fig. 112a, ist derjenige, an welchem die Kräfte nur auf einer Seite des Unterstützungspunktes angreifen; ein **zweiarmiger Hebel** ist ein solcher, an welchem die Kräfte beiderseits desselben wirken, Fig. 112b. — Fallen alle Hebelarme in eine gerade Linie, so heißt der Hebel ein **gerader Hebel**, bilden die Hebelarme einen Winkel, so heißt er **Winkelhebel**, Fig. 112c.

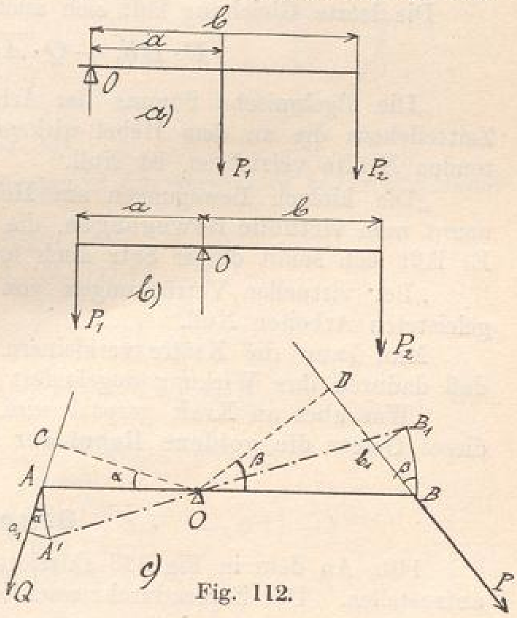

Fig. 112.

„Gleichgewicht an einem Hebel ist vorhanden, wenn die Summe der statischen Momente aller vorhandenen äußeren Kräfte in bezug auf den Unterstützungspunkt gleich Null wird.“

Ein Hebel, Fig. 112c, an dem die Kräfte P und Q angreifen, sei im Gleichgewicht. Wird er um den Unterstützungspunkt ein wenig gedreht, so daß A nach A' und B nach B' kommt, dann ist die von P geleistete Arbeit $P \cdot \overline{Bb_1}$, — die von Q geleistete $Q \cdot \overline{Aa_1}$. — Hierbei ist $\overline{A'a_1} \perp Q$ und $\overline{B'b_1} \perp P$.

Da die Bögen AA' und BB' sehr klein sind, können sie als Gerade angenommen werden. Deshalb folgt

$$\overline{Aa_1} = AA_1 \cdot \cos\alpha$$

$$\overline{Bb_1} = BB_1 \cdot \cos\beta$$

Die Arbeiten der Kräfte P und Q sind dann

$$P \cdot \overline{Bb_1} = P \cdot BB_1 \cos\beta = P \cdot BB_1 \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$

$$Q \cdot \overline{Aa_1} = Q \cdot AA_1 \cdot \cos\alpha = Q \cdot AA_1 \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

Nun ist $P \cdot \overline{OD} = Q \cdot \overline{OC}$ und $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ oder $\frac{AA_1}{\overline{OA}} = \frac{BB_1}{\overline{OB}}$

Daher ergibt sich

$$P \cdot \overline{Bb_1} : Q \cdot \overline{Aa_1} = P \cdot BB_1 \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} : Q \cdot AA_1 \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

$$= P \cdot \overline{OD} \cdot \frac{BB}{\overline{OB}} : Q \cdot \overline{OC} \cdot \frac{AA_1}{\overline{OA}} \quad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{P \cdot \overline{Bb_1} = Q \cdot \overline{Aa_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(100a)}$$

Die letzte Gleichung läßt sich auch in der Form schreiben:

$$\boldsymbol{P \cdot \overline{Bb_1} - Q \cdot \overline{Aa_1} = O} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(100b)}$$

„Die algebraische Summe der Arbeiten, welche während eines kleinen Zeitteilchens die an dem Hebel wirkenden und sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte verrichten, ist Null.“

„Die kleinen Bewegungen am Hebel (auch an anderen Vorrichtungen) nennt man **virtuelle Bewegungen**, die kleinen Arbeiten **virtuelle Arbeiten**.“ Es läßt sich somit obiger Satz auch folgendermaßen aussprechen:

„Bei virtuellen Verrückungen von Vorrichtungen ist die Summe aller geleisteten Arbeiten Null.“

Man kann die Kräfte verkleinern und ihre Hebelarme vergrößern, so daß dadurch ihre Wirkung ungeändert bleibt.

„Was aber an Kraft gespart wird, geht an Weg verloren. Man nennt dieses Gesetz **die goldene Regel der Mechanik**.“

Beispiele.

140. An dem in Fig. 113 skizzierten Hebel die Gleichgewichtsbedingung aufzustellen. Der Zapfendurchmesser sei r, der Zapfenreibungskoeffizient φ.

Auflösung: Bringt man im Zapfenmittelpunkte zu den Kräften P, Q und G parallele und entgegengesetzt gleiche Kräfte an, so ergeben sich die Kräftepaarmomente $P \cdot a$, $G \cdot c$ und Qb, und der Zapfen erfährt einen Normaldruck N. Letzterer wird als Resultierende aller an ihm angreifenden horizontalen und vertikalen Kräfte bestimmt. Nun ergeben sich die Gleichungen

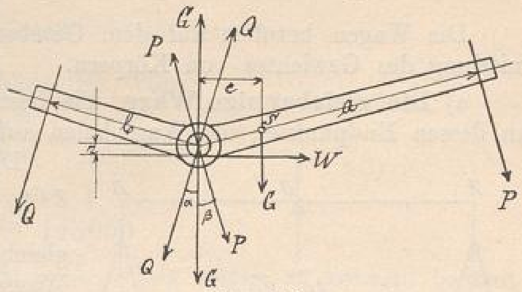

Fig. 113.

$$\Sigma(H) = P \sin\beta - Q \sin\alpha$$
$$\Sigma(V) = G + P \cdot \cos\beta + Q \cos\alpha$$
$$N = \sqrt{[\Sigma(H)]^2 + [\Sigma(V)]^2}$$

Der Zapfenreibungswiderstand wird $\varphi \cdot N$. Die Gleichgewichtsbedingung am Hebelzapfen lautet daher

$$\boldsymbol{P \cdot a + G \cdot c - Q \cdot b +}$$
$$\boldsymbol{+ \varphi \sqrt{(P \sin\beta - Q \sin\alpha)^2 + (G + P\cos\beta + Q\cos\alpha)^2} \cdot r = 0}$$

141. Wie groß muß das Gewicht G des in Fig. 114 gezeichneten Sicherheitventiles gemacht werden, damit letzteres bei einem Kesselüberdrucke von $p = 6$ Atm. geschlossen bleibe? Hierzu noch gegeben das Ventilgewicht

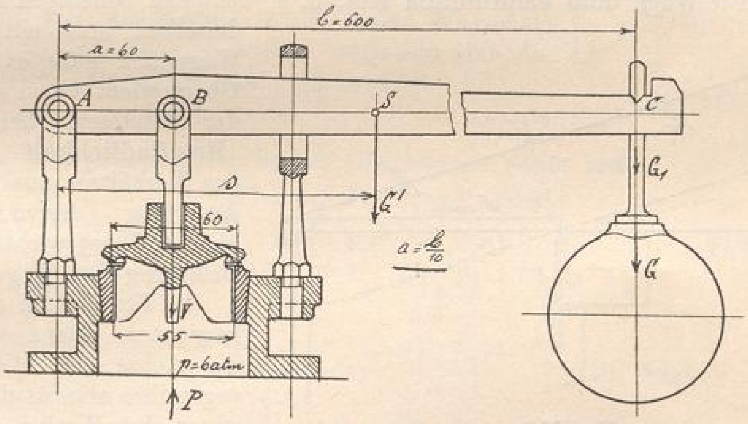

Fig. 114.

$V = 0{,}2$ kg und das auf den Aufhängepunkt des Gewichtes reduzierte Hebelgewicht $G_1 = 1$ kg.

In bezug auf den Drehpunkt A gilt

$$V \cdot a - P \cdot a + (G + G_1)\, b = 0$$
$$G + G_1 = P \cdot \frac{a}{b} - V \cdot \frac{a}{b}$$
$$G = P \cdot \frac{a}{b} - V \cdot \frac{a}{b} - G_1$$
$$G = \frac{a}{b}\left(\frac{\pi}{4} d^2 p - V\right) - G_1$$
$$G = \frac{60}{600}\left(\frac{\pi}{4} 5{,}5^2 \cdot 6 - 0{,}2\right) - 1$$
$$\boldsymbol{G \sim 13\ \mathrm{kg}}$$