Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 37. Rollen. Beispiele 142-144

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Wird Z in Y und N zerlegt, so ergibt sich

$$Y \cdot l_1 = Z \cdot r, \text{ daraus}$$

$$Y = \frac{Z \cdot r}{l_1} = Q \frac{m}{l} \cdot \frac{r}{l_1}$$

Gleichgewicht ist dann vorhanden, wenn die Summe der Momente von X und Y in bezug auf D_1 gleich ist dem Momente von P in bezug auf genannten Drehpunkt. Somit wird

$$P \cdot a = X \cdot b + Y \cdot c$$

$$P \cdot a = Q \cdot \frac{n}{l} \cdot b + Q \frac{m}{l} \cdot \frac{r}{l_1} \cdot c$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a} \cdot \left[\frac{n}{l} + \frac{m}{l} \cdot \frac{r}{l_1} \cdot \frac{c}{b}\right]$$

Wenn $\frac{r}{l_1} = \frac{b}{c}$, folgt $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}\left(\frac{n}{l} + \frac{m}{l}\right)$ oder

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a} \cdot \frac{m+n}{l} = \frac{b}{a}, \text{ d. h.}$$

$$\boldsymbol{P = Q \cdot \frac{b}{a} \text{ für } \frac{r}{l_1} = \frac{b}{c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(105)}$$

Wenn demnach $a = 10\,b$ gemacht wird, braucht P nur $^1/_{10}\,Q$ zu sein.

Daß die Brücke immer horizontal bleibt, geht aus folgender Überlegung hervor. Senkt sich F um x, so senkt sich E um $\frac{l_1}{r}\,x$ und D um $\frac{b}{c} \cdot \frac{l_1}{r} \cdot x$. Da $\frac{b}{c}$ und $\frac{l_1}{r}$ reziproke Werte sind, ist die Senkung des Punktes D ebenfalls x, also genau so groß wie diejenige von F. Das Horizontalbleiben der Brücke ist nötig, da die Wägungen sonst ungenau sein würden.

§ 37. Rollen.

a) Die feste Rolle.

In folgendem werde die Bedingung des Gleichgewichtes an einer festen Rolle mit Rücksicht auf alle vorhandenen Widerstände abgeleitet. Hierzu Fig. 122.

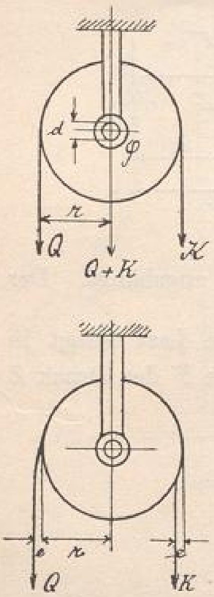

Fig. 122.

α) **Der Einfluß des Zapfenreibungswiderstandes.** Das Reibungsmoment am Zapfen ist

$$M = \varphi\,(Q + K) \cdot \frac{d}{2}$$

Demnach ist zur Überwindung der Reibung am Umfang der Rolle die Kraft

$$\frac{M}{r} = \frac{Q+K}{2\,r} \cdot \varphi\,d$$

nötig, welcher durch $K - Q$ das Gleichgewicht gehalten werden muß.

$$\frac{M}{r} = \frac{Q+K}{2\,r} \cdot \varphi\, d = K - Q$$

$$K \cdot 2\,r - Q \cdot 2\,r = K\,\varphi\, d + Q\,\varphi\, d$$

$$K\,(2\,r - \varphi\, d) = Q\,(2\,r + \varphi\, d)$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{2\,r + \varphi\, d}{2\,r - \varphi\, d} = \frac{1 + \frac{\varphi\, d}{2\,r}}{1 - \frac{\varphi\, d}{2\,r}}$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{1 + \varphi \frac{d}{r} + \left(\frac{\varphi\, d}{2\,r}\right)^2}{1 - \left(\frac{\varphi\, d}{2\,r}\right)^2} \sim 1 + \varphi \frac{d}{r}$$

Die Quadrate können nämlich ihrer Kleinheit halber vernachlässigt werden. Demnach beträgt die Zapfenreibung

$$\boldsymbol{Z = Q \cdot \varphi \frac{d}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(106)}$$

β) **Der Seilwiderstand.** Wird ein Seil aus gerader Richtung in eine Bogenrichtung übergeführt, dann ergibt sich ein Widerstand desselben gegen die Annahme dieser neuen Richtung. Das lastseitige Seilende weicht von der Tangente an die Ablaufstelle um e nach außen, das kraftseitige von der Tangente an die Anlaufstelle um e nach innen ab. Daher wird

$$K\,(r - e) = Q\,(r + e)$$

$$\frac{K}{Q} = \frac{r+e}{r-e} = \frac{1 + \frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}} \sim 1 + \frac{e}{2\,r}$$

Der Seilwiderstand ergibt sich mit

$$\boldsymbol{B = Q \frac{2\,e}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(107 a)}$$

Nach Versuchen ist, wenn δ den Durchmesser des Seiles bedeutet,

$$e = 6{,}5\,\delta^2$$

Demnach läßt sich auch schreiben

$$\boldsymbol{B = Q \frac{13\,\delta^2}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(107 b)}$$

Die zum Heben der Last Q mittels einer festen Rolle nötige Kraft wird daher

$$K = Q + Z + B = Q + Q \frac{\varphi\, d}{r} + Q \frac{13\,\delta^2}{r}$$

$$\boldsymbol{K = Q \left(1 + \varphi \frac{d}{r} + 13 \frac{\delta^2}{r}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(108 a)}$$

Den Klammerausdruck bezeichnet man mit μ und nennt μ die **Widerstandsziffer für Seilrollen.** Sie beträgt ca. 1,1. Dann wird

$$\boldsymbol{K = \mu\, Q = 1{,}1\, Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(108 b)}$$

Zum Heben von $Q = 100$ kg braucht man an der Seilrolle eine Kraft $K = 110$ kg.

Beim Herablassen einer Last vertauschen K und Q ihre Rollen, so daß folgt

$$Q = \mu \cdot K$$

Z. B. $100 = 1{,}1\,K$, woraus $K = \frac{100}{1{,}1} = 90{,}9$ kg sich ergibt.

Wird statt des Seiles eine Kette benutzt, so entstehen ebenfalls an Ablauf- und Anlaufstelle Widerstände und zwar durch gegenseitiges Verdrehen der benachbarten Kettenglieder. Praktische Versuche ergeben für den **Kettenwiderstand** die Formel

$$W = f \cdot \frac{\delta}{r} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

wenn $f = 0{,}15$ und δ der Durchmesser des Ketteneisens sind.

Die **Widerstandsziffer für Kettenrollen** wird ca. 1,05. Demnach ist die zum Heben einer Last Q mittels Kettenrolle nötige Kraft

$$K = \mu_1\, Q \sim 1{,}05\, Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

Für Drahtseilrollen wird die Widerstandsziffer ca. 1,04. — Daher gilt

$$K = \mu_2\, Q \sim 1{,}04\, Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (111)$$

„Das Verhältnis aus der theoretischen (ideellen) und der wirklichen (effektiven) Zugkraft heißt der **Wirkungsgrad der festen Rolle.**" Derselbe ist also

$$\eta = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (112)$$

b) Die lose Rolle.

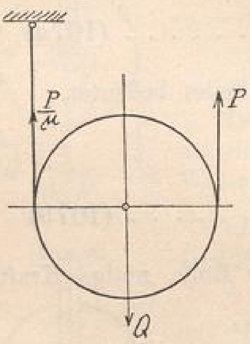

Fig. 123.

In Fig. 123 greife an einer losen Rolle die Last Q an. Ist die zur Hebung derselben nötige Kraft P, so wird das linksseitige Seil durch $\frac{P}{\mu}$ gespannt. Somit ergibt sich

$$P + \frac{P}{\mu} = Q$$

$$P \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) = Q \quad \text{und}$$

$$P = \frac{Q}{1 + \frac{1}{\mu}} \quad \ldots\ldots \quad (113)$$

Werden Zapfenreibung und Seil-(Ketten-, Drahtseil-)widerstand vernachlässigt, dann wird die Widerstandsziffer 1 und

$$P = \frac{Q}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (113\text{a})$$

Der **Wirkungsgrad der losen Rolle** folgt sodann mit

$$\eta = \frac{\frac{Q}{2}}{\frac{Q}{1+\frac{1}{\mu}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{\mu}}}$$

$$\eta = \frac{1+\frac{1}{\mu}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(114)}$$

Beispiele.

142. Wie groß sind Widerstandsziffer und Wirkungsgrad einer festen Hanfseilrolle, an welcher $r = 80$ mm, $d = 24$ mm, $\delta = 20$ mm und $\varphi = 0{,}15$ betragen?

Auflösung:

$$\mu = 1 + 0{,}15\,\frac{0{,}024}{0{,}08} + 13\,\frac{0{,}0004}{0{,}08}$$

$$\mu = 1 + 0{,}045 + 0{,}065$$

$$\mu = \mathbf{1{,}11}$$

$$\eta = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{1{,}11}$$

$$\eta = \mathbf{0{,}91}$$

143. Wie groß ist die zum Heben einer Last Q mittels einer losen Drahtseilrolle nötige Kraft P? Wie groß ist der Wirkungsgrad dieser Rolle?

Auflösung:

$$P = \frac{Q}{1+\frac{1}{1{,}04}} = \frac{Q}{1+0{,}96} = \frac{Q}{1{,}96}$$

$$\boldsymbol{P = 0{,}51\,Q}$$

$$\eta = \frac{1+\frac{1}{\mu}}{2} = \frac{1+0{,}96}{2} = \frac{1{,}96}{2}$$

$$\eta = \mathbf{0{,}98}$$

144. In welchem Verhältnisse stehen Kraft und Last an der losen Rolle, Fig. 124, wenn von allen Reibungswiderständen Abstand genommen wird?

Auflösung: Die Last Q zerlegt sich in die Komponenten $\frac{Q}{2\cos\alpha}$ und $\frac{Q}{2\cos\alpha}$.

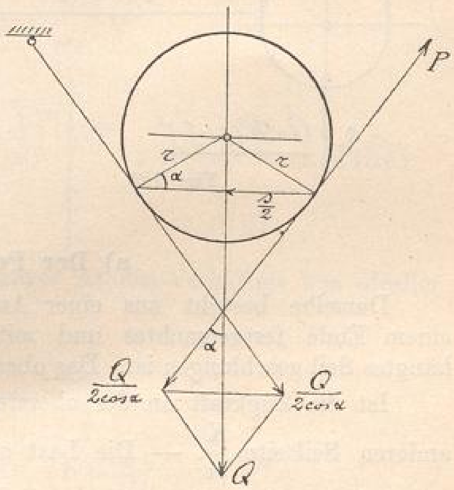

Fig. 124.

Die nötige Kraft P muß dann gleich einer solchen sein. Somit wird

$$\frac{P}{\frac{Q}{2\cos\alpha}} = \frac{P}{Q}\cdot 2\cos\alpha = \frac{P}{Q}\cdot 2\,\frac{s}{2r} = \frac{P\,s}{Q\,r}$$

Demnach $\qquad P : Q = r : s$, d. h.

„Die Kraft verhält sich zur Last wie der Radius der Rolle zur Sehne des vom Seil umspannten Bogens.“

§ 38. Rollenzüge und Flaschenzüge.

Mit Hilfe der Entwicklungen im letzten Paragraphen ist es möglich, die Kraftverhältnisse an manchen Rollenverbindungen, welche unter dem Namen Rollenzüge und Flaschenzüge in der Praxis angewendet werden, zu beurteilen.

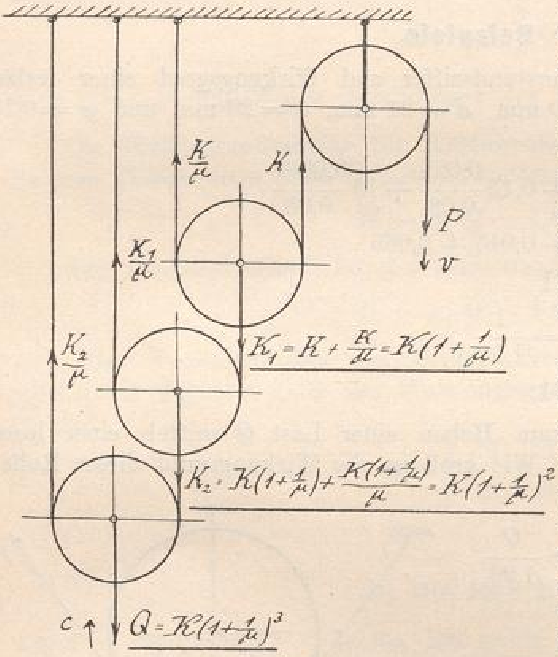

Fig. 125.

„Als einzige Regel hat man nur zu beachten, daß in jedem Falle, wo ein Seil sich um eine Rolle schlingt, die Spannung des ablaufenden (ziehenden) Seiles gleich der μfachen Spannung des auflaufenden (gezogenen) Seiles ist.“

Zwischen Rollen- und Flaschenzügen besteht eigentlich kein Unterschied. Doch versteht man im engeren Sinne unter Rollenzügen solche Rollenverbindungen, bei welchen die Rollen einzeln neben- oder untereinander angebracht sind, und unter Flaschenzügen solche, bei welchen die Rollen in zwei Gehäusen, den sogenannten **Flaschen**, untergebracht werden.

a) Der Potenzrollenzug.

Derselbe besteht aus einer Anzahl von Rollen, um welche je ein an einem Ende festgemachtes und mit dem andern an die nächste Rolle gehängtes Seil geschlungen ist. Das oberste Seil geht um eine feste Rolle. Fig. 125.

Ist die Zugkraft an der obersten Rolle K, so ist der Widerstand in der anderen Seilseite $\frac{K}{\mu}$. — Die Last an dieser Rolle ist daher

$$K_1 = K + \frac{K}{\mu} = K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$$

Ebenso ergibt sich die Last an der nächsten losen Rolle mit

$$K_2 = K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + \frac{K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)}{\mu} = K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2$$