Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 38. Rollenzüge und Flaschenzüge. Beispiele 145-152

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

Demnach $\quad P : Q = r : s$, d. h.

„Die Kraft verhält sich zur Last wie der Radius der Rolle zur Sehne des vom Seil umspannten Bogens.“

---

§ 38. Rollenzüge und Flaschenzüge.

Mit Hilfe der Entwicklungen im letzten Paragraphen ist es möglich, die Kraftverhältnisse an manchen Rollenverbindungen, welche unter dem Namen Rollenzüge und Flaschenzüge in der Praxis angewendet werden, zu beurteilen.

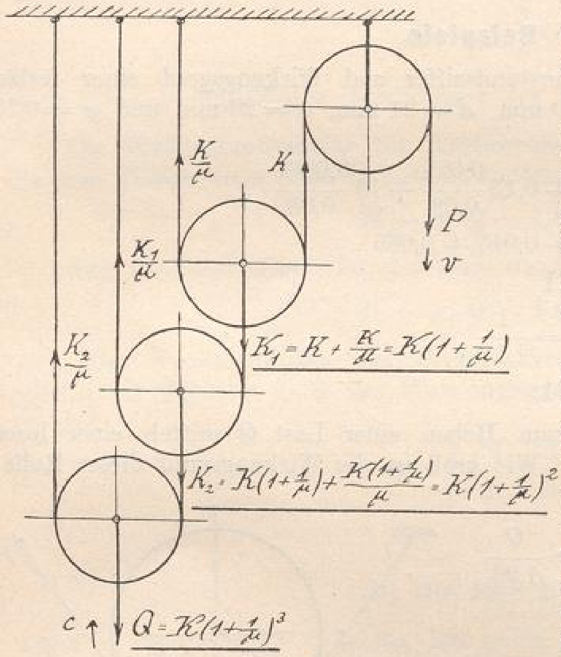

Fig. 125.

„Als einzige Regel hat man nur zu beachten, daß in jedem Falle, wo ein Seil sich um eine Rolle schlingt, die Spannung des ablaufenden (ziehenden) Seiles gleich der μfachen Spannung des auflaufenden (gezogenen) Seiles ist.“

Zwischen Rollen- und Flaschenzügen besteht eigentlich kein Unterschied. Doch versteht man im engeren Sinne unter Rollenzügen solche Rollenverbindungen, bei welchen die Rollen einzeln neben- oder untereinander angebracht sind, und unter Flaschenzügen solche, bei welchen die Rollen in zwei Gehäusen, den sogenannten **Flaschen**, untergebracht werden.

a) Der Potenzrollenzug.

Derselbe besteht aus einer Anzahl von Rollen, um welche je ein an einem Ende festgemachtes und mit dem andern an die nächste Rolle gehängtes Seil geschlungen ist. Das oberste Seil geht um eine feste Rolle. Fig. 125.

Ist die Zugkraft an der obersten Rolle K, so ist der Widerstand in der anderen Seilseite $\frac{K}{\mu}$. — Die Last an dieser Rolle ist daher

$$K_1 = K + \frac{K}{\mu} = K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$$

Ebenso ergibt sich die Last an der nächsten losen Rolle mit

$$K_2 = K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + \frac{K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)}{\mu} = K\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2$$

An der untersten, etwa der $n$ten losen Rolle greift daher an

$$K_n = K\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n = Q, \text{ woraus}$$

$$K = \frac{Q}{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (115)$$

sich ergibt. Wären keinerlei Reibungswiderstände vorhanden, also die Widerstandsziffer $\mu = 1$, dann folgt

$$K = \frac{Q}{2^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (115a)$$

d. h. „Die Kraft ist gleich der Last Q, dividiert durch die sovielte Potenz von 2 als die Zahl der losen Rollen im Potenzflaschenzuge beträgt."

Zur Hebung der Last Q ist am freien über die obere feste Rolle gehenden Seilende die Kraft

$$P = \mu K = \frac{\mu Q}{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n} = \frac{Q}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n} \quad \ldots\ldots \quad (115b)$$

nötig. — Um die Geschwindigkeit der Last zu finden, braucht nur die Arbeitsgleichung aufgestellt zu werden (nämlich Arbeit der Kraft gleich Arbeit der Last). — Nach den Bezeichnungen in Fig. 125 wird

$$P \cdot v = Q \cdot c$$

$$c = \frac{P \cdot v}{Q} = \frac{Q \cdot v}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n \cdot Q}$$

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{v}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n} \\ \text{für } \mu = 1 \qquad c &= \frac{v}{2^n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (115c)$$

„Der Wirkungsgrad des Potenzrollenzuges ist das Verhältnis aus ideeller Zugkraft und effektiver."

$$\eta = \frac{\frac{Q}{2^n}}{\frac{Q}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n}} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n}} \quad \text{oder}$$

$$\eta = \frac{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n}{2^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

b) Der gewöhnliche Flaschenzug.

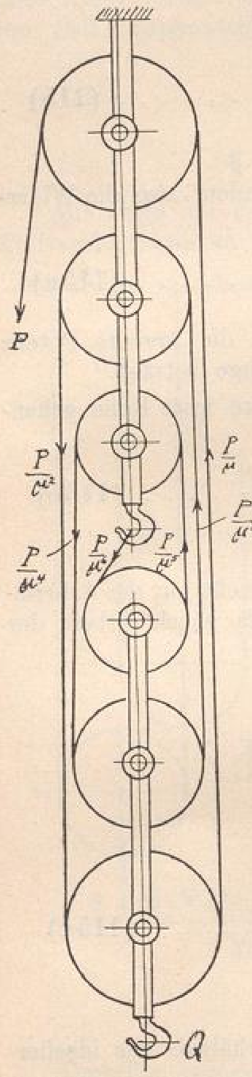

Fig. 126.

Bei diesem ist die Hälfte der Rollen in einer festen Flasche, die andere Hälfte in einer losen Flasche untergebracht. Die Seilführung ist aus der Fig. 126 ersichtlich. Laut Bezeichnungen der letzteren gilt

$$Q = \frac{P}{\mu} + \frac{P}{\mu^2} + \frac{P}{\mu^3} + \frac{P}{\mu^4} + \frac{P}{\mu^5} + \frac{P}{\mu^6}$$

$$Q = \frac{P}{\mu^6}(1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4 + \mu^5)$$

$$Q = \frac{P}{\mu^6} \cdot \frac{\mu^6 - 1}{\mu - 1}.$$

Allgemein

$$\boldsymbol{Q = \frac{P}{\mu^{2n}} \cdot \frac{\mu^{2n} - 1}{\mu - 1}} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(117)}$$

Wird die Reibung überall vernachlässigt, dann wird $\mu = 1$ und

$$Q = \frac{P}{1^{2n}} \cdot (\mu^{2n-1} + \mu^{2n-2} + \mu^{2n-3} + \ldots + 1) = P \cdot 2n$$

$$\boldsymbol{P = \frac{Q}{2n}} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(117a)}$$

d. h. „Die mittels eines Flaschenzuges zum Heben einer Last Q nötige Kraft P ist gleich dem Quotienten aus der Last und der doppelten Zahl der Rollen in einer Flasche."

Der gewöhnliche Flaschenzug wird oft auch **Faktorenflaschenzug** genannt.

Der Wirkungsgrad desselben ist

$$\eta = \frac{\frac{Q}{2n}}{\frac{Q \cdot \mu^{2n}(\mu - 1)}{\mu^{2n} - 1}} = \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{\mu^{2n}(\mu - 1)}{\mu^{2n} - 1}} \quad \text{oder}$$

$$\eta = \frac{\mu^{2n} - 1}{2n \cdot \mu^{2n}(\mu - 1)} \quad \ldots\ldots \quad \textbf{(118)}$$

c) Der Differenzialflaschenzug.

Zur Hebung schwerer Lasten von Menschenhand eignet sich bestens der Differenzialflaschenzug, da in diesem Falle ein Faktorenflaschenzug wegen zu großer Zahl von Rollen einen zu geringen Wirkungsgrad ergeben würde.

Derselbe besteht der Hauptsache nach aus zwei auf derselben Achse sitzenden Rollen (meist aus einem Stück gegossen), deren Durchmesser indes nicht sehr verschieden sind, und einer Rolle, deren Durchmesser gleich ist dem Mittel aus den Durchmessern der ersteren Rollen. Um alle Rollen ist ein endloses Seil (endlose Kette) geschlungen, wie Fig. 127 anzeigt.

Entsteht im linken Seilteil an der unteren Rolle die Zugkraft P, so muß die im rechten Seilteil $P\mu$ sein. Demnach ergibt sich

$$Q = P + P \cdot \mu = P \cdot (\mu + 1)$$

$$P = \frac{Q}{1 + \mu}$$

Die Summe der Momente der Kräfte K und P in bezug auf den Drehpunkt der oberen Rollen muß nun μmal so groß sein, wie das Moment der Kraft $P \cdot \mu$ in bezug auf denselben, also wird

$$K \cdot R + P \cdot r = \mu (P \cdot \mu \cdot R)$$

$$K \cdot R = P (\mu^2 R - r)$$

$$\boldsymbol{K = Q \frac{\mu^2 - \frac{r}{R}}{1 + \mu}} \quad \ldots \quad \textbf{(119)}$$

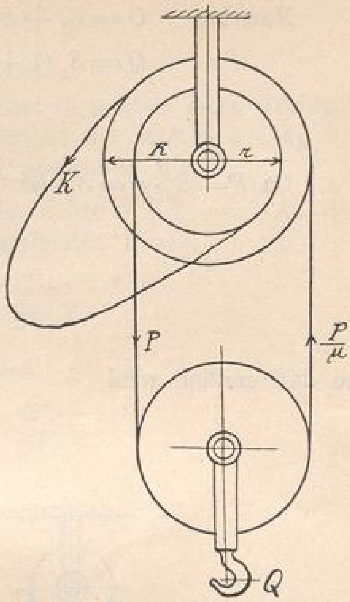

Fig. 127.

Bei Vernachlässigung aller Widerstände würde sich wegen $\mu = 1$ ergeben

$$\boldsymbol{K = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right)} \quad \ldots \quad \textbf{(119a)}$$

Der Wirkungsgrad des Differenzialflaschenzuges ist

$$\eta = \frac{\frac{Q}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{Q \frac{\mu^2 - \frac{r}{R}}{1 + \mu}} \quad \text{oder}$$

$$\eta = \frac{(1 + \mu)\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{2\left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(120)}$$

d) Lastrollenzüge mit gemeinsamer Hubbahn der losen Rollen.

Beispiel.

Lasttrum (Lastende) fest aufgehängt.

Die Spannungen in den parallelen Seilstücken seien der Reihe nach S_1, S_2, S_3 .... S_n, Fig. 128. Dann wird

$$S_2 = S_1 \cdot \mu$$

$$S_3 = S_2 \cdot \mu = S_1 \cdot \mu^2$$

$$S_4 = S_3 \cdot \mu = S_1 \cdot \mu^3$$

$$\vdots$$

$$S_n = S_1 \cdot \mu^{n-1}.$$

Nun ist $Q = S_1 + S_1 \cdot \mu + S_1 \cdot \mu^2 + \ldots\ldots S_1 \cdot \mu^{n-1}$

$$Q = S_1 (1 + \mu + \mu^2 + \ldots\ldots + \mu^{n-1})$$

$$Q = S_1 \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}.$$

Da $P = S_n \cdot \mu = S_1 \cdot \mu^{n-1} \cdot \mu = S_1 \cdot \mu^n$ ist, folgt

$$S_1 = \frac{P}{\mu^n} \text{ und}$$

$$Q = \frac{P}{\mu^n} \cdot \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1},$$

so daß endlich wird

$$\mathbf{P = Q \cdot \frac{\mu^n \cdot (\mu - 1)}{\mu^n - 1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(121)}$$

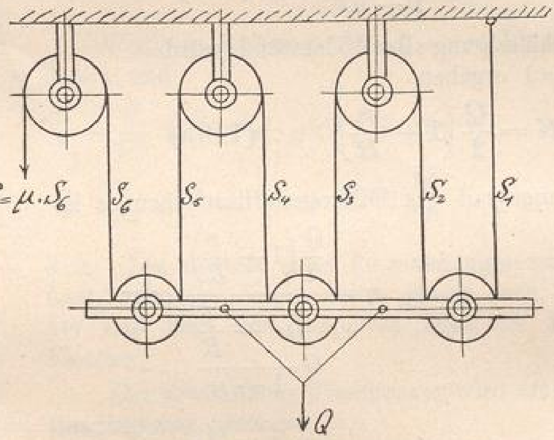

Fig. 128.

Die theoretische Hubkraft ergibt sich aus

$$P = Q \frac{\mu^n}{\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}} = Q \frac{\mu^n}{\mu^{n-1} + \mu^{n-2} + \ldots + 1}$$

wenn man in dieser Beziehung $\mu = 1$ setzt, mit

$$\mathbf{P = \frac{Q}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(121\,a)}$$

Daher wird der Wirkungsgrad dieses Rollenzuges

$$\eta = \frac{\frac{Q}{n} \cdot (\mu^n - 1)}{Q \cdot \mu^n \cdot (\mu - 1)} \text{ oder}$$

$$\eta = \frac{\mu^n - 1}{n \cdot \mu^n (\mu - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(122)}$$

Beispiele.

145. Wie groß ist die zum Heben einer Last Q mittels eines n rolligen Potenzrollenzuges nötige Kraft P, wenn das Gewicht der Rollen à G kg berücksichtigt, von den Reibungswiderständen aber abgesehen wird?

Auflösung: An der untersten Rolle greift die Kraft $Q+G$ an. An der Schere der zweiten Rolle ist die Größe der angreifenden Kraft

$$\frac{Q+G}{2}+G=\frac{Q+3G}{2}=\frac{Q+(2^2-1)G}{2^{2-1}}$$

Für die Last an der dritten Rolle ergibt sich

$$\frac{Q+3G}{4}+G=\frac{G+7G}{4}=\frac{Q+(2^3-1)G}{2^{3-1}}$$

Allgemein an der n ten Rolle

$$\frac{Q+(2^n-1)G}{2^{n-1}}$$

Demnach ist zum Heben die Kraft

$$P=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q+(2^n-1)G}{2^{n-1}} \text{ nötig oder}$$

$$\boldsymbol{P=\frac{Q+(2^n-1)G}{2^n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(115 d)}$$

146. Wie verändert sich das Resultat der letzten Aufgabe, wenn außerdem noch die Reibungswiderstände berücksichtigt werden?

Auflösung: Laut Definition des Wirkungsgrades ergibt sich unter Benützung der Formeln (116 und 115 d)

$$\frac{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n}{2^n}=\frac{\frac{Q+(2^n-1)G}{2^n}}{P}$$

$$\boldsymbol{P=\frac{Q+(2^n-1)G}{\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(115 e)}$$

147. Es sollen 400 kg mit einem 4 rolligen Potenzrollenzuge gehoben werden. Wie groß ist die hierzu erforderliche Kraft, wenn das Gewicht jeder Rolle 6 kg ist und $\mu=1{,}1$ (für Seile) angenommen werden kann?

Auflösung: $$P=\frac{400+(2^4-1)\cdot 6}{\frac{1}{1{,}1}\left(1+\frac{1}{1{,}1}\right)^4}$$

$$P=\frac{400+90}{0{,}91\cdot 1{,}91^4}=\frac{490}{0{,}91\cdot 13{,}3}$$

$$\boldsymbol{P\sim 38\ \text{kg}}$$

148. Wie groß ist der Wirkungsgrad eines 4 rolligen Potenzseilrollenzuges?

Auflösung:
$$\eta = \frac{1}{1,1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{1,1}\right)^4}{2^4}$$
$$\eta \sim \mathbf{0,76}$$

d. h. 76%, natürlich unter Annahme, daß vier lose und eine feste Rolle vorhanden sind.

149. Welche Last kann mittels eines gewöhnlichen Flaschenzuges mit vier Rollen in jeder Flasche gehoben werden, wenn am freien Seilende mit 15 kg gezogen wird? Wie groß ist ferner der Wirkungsgrad dieses Flaschenzuges?

Auflösung:
$$Q = \frac{P}{1,1^8} \cdot \frac{1,1^8 - 1}{1,1 - 1}$$
$$Q = \frac{15}{2,1} \cdot \frac{1,1}{0,1}$$
$$\mathbf{Q \sim 78,5\ kg}$$
$$\eta = \frac{1,1^8 - 1}{8 \cdot 1,1^8 \cdot 0,1} = \frac{1,1}{0,8 \cdot 2,1} = \frac{1,1}{1,68}$$
$$\eta = \mathbf{0,65}$$

Ohne Rücksicht auf die Reibungswiderstände würde sich ergeben
$$Q = P \cdot 2n$$
$$Q = 15 \cdot 8 = 120$$

Wirklich ist $\qquad Q = 120 \cdot 0,65 \sim 78,5$ kg

150. Welche Last kann mit einem Differenzialflaschenzug gehoben werden, wenn das Verhältnis der Halbmesser der oberen Rollen $\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$ und die aufgewandte Kraft $K = 40$ kg ist? Wie groß ist ferner der Wirkungsgrad? $\mu = 1,1$.
$$K = Q \frac{\mu^2 - \frac{r}{R}}{1 + \mu}$$
$$Q = \frac{K(1 + \mu)}{\mu^2 - \frac{r}{R}}$$
$$Q = \frac{40 \cdot 2,1}{1,1^2 - \frac{11}{12}} = \frac{84}{1,21 - 0,917} = \frac{84}{0,293}$$
$$\mathbf{Q \sim 287\ kg}$$
$$\eta = \frac{(1 + \mu) \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)}{2\left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right)} = \frac{2,1 \cdot \frac{1}{12}}{2 \cdot \left(1,1^2 - \frac{11}{12}\right)}$$
$$\eta = \frac{2,1}{24 \cdot 0,293}$$
$$\eta \sim \mathbf{0,3}$$

151. Unter welcher Bedingung ist ein Differenzialflaschenzug **selbsthemmend**, d. h. wann sinkt die untere Rolle trotz der Belastung nicht mehr hinunter?

Auflösung: In der Formel (119) ist statt μ nur $\frac{1}{\mu}$ zu setzen, damit die Größe der Kraft, welche das Herabsinken der Last verhindert, erhalten werde.

$$K = Q \frac{\frac{1}{\mu^2} - \frac{r}{R}}{1 + \frac{1}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(119b)}$$

Der Differenzialflaschenzug wird nun selbsthemmend, wenn $K = O$ ist. Das trifft zu für

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{r}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(119c)}$$

152. Wie groß ist der Wirkungsgrad eines selbsthemmenden Differenzialflaschenzuges?

Auflösung:
$$\eta = \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{2\left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right)} = \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{r}{R}}\right)\frac{R - r}{R}}{2\left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R}\right)}$$

$$\eta = \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{r}{R}}\right)\frac{R - r}{R}}{2\frac{R^2 - r^2}{Rr}}$$

$$\eta = \frac{1 + \sqrt{\frac{r}{R}}}{2\left(1 + \frac{R}{r}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(119d)}$$

Für $\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$ wird $\eta = \frac{1 + \sqrt{\frac{11}{12}}}{2\left(1 + \frac{12}{11}\right)} = \frac{1 + 0{,}955}{2 \cdot (1 + 1{,}09)} \sim \frac{1{,}955}{4{,}18}$

$$\eta \sim \mathbf{0{,}47}$$