



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 41. Die schiefe Ebene. Beispiele 155-160

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76868](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76868)

§ 41. Die schiefe Ebene.

In diesem Paragraphen können alle Gleichgewichtsprobleme als Beispiele behandelt werden.

Beispiele.

155. Wie groß muß die parallel zur schiefen Ebene wirkende Kraft P , Fig. 136, sein, damit der Körper a) nicht heruntergleite, b) von der Kraft gleichförmig hinaufgezogen werden könne? Reibungskoeffizient sei f .

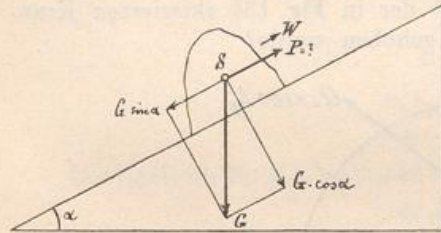


Fig. 136.

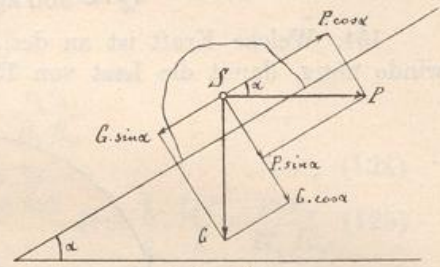


Fig. 137.

Auflösung: Die Kraft G zerlegt man in $G \sin \alpha$ und $G \cos \alpha$.

ad a) Soll der Körper nicht heruntergleiten, dann muß $G \sin \alpha$ gleich sein P plus der Reibung. Somit ergibt sich

$$G \sin \alpha = P + f \cdot G \cdot \cos \alpha$$

$$P = G \cdot (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Nun ist $f = \operatorname{tg} \varphi$ (83), so daß folgt

$$P = G (\sin \alpha - \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha) = G \left(\sin \alpha - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha \right)$$

$$P = G \frac{\sin \alpha \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha}{\cos \varphi}$$

$$P = G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \dots \dots \dots (129a)$$

ad b) Soll die Kraft P den Körper gleichförmig nach aufwärts bewegen, so wird die Reibung entgegengesetzte Richtung haben, also negativ zu setzen sein. Demnach ist

$$P = G \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} \dots \dots \dots (129b)$$

Wird die Reibung des Körpers auf der schiefen Ebene vernachlässigt, dann ist in beiden Fällen

$$P = G \sin \alpha,$$

d. h. gleich der den Körper hinunterziehenden Kraft.

156. Wie groß muß in den Fällen a) und b) die zur Basis der schiefen Ebene parallel wirkende Kraft P sein? Fig. 137.

Auflösung: ad a) Die Reibung wirkt hier im Sinne der Komponente $P \cdot \cos \alpha$. Gleichgewicht ist also vorhanden, wenn gilt

$$\begin{aligned}
 G \sin \alpha &= P \cos \alpha + f (G \cos \alpha + P \sin \alpha) \\
 G (\sin \alpha - f \cos \alpha) &= P (\cos \alpha + f \sin \alpha) \\
 G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} &= P \frac{\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi}{\cos \varphi} \\
 G \sin (\alpha - \varphi) &= P \cdot \cos (\alpha - \varphi) \\
 P &= G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos (\alpha - \varphi)} \\
 \mathbf{P} &= \mathbf{G \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)} \dots \dots \dots \mathbf{(130a)}
 \end{aligned}$$

ad b) Soll der Körper gleichförmig nach aufwärts gezogen werden, dann muß sein

$$\mathbf{P} = \mathbf{G \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)} \dots \dots \dots \mathbf{(130b)}$$

Bei Vernachlässigung der Reibung wird $P = G \operatorname{tg} \alpha$ — Da $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b}$, wenn h die Höhe und b die Basis der schiefen Ebene bedeuten, ist, folgt $P : G = h : b$, d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe zur Basis der schiefen Ebene.

157. Wie groß muß in den Fällen a) und b) die mit der schiefen Ebene den Winkel β einschließende Kraft P sein? Fig. 138.

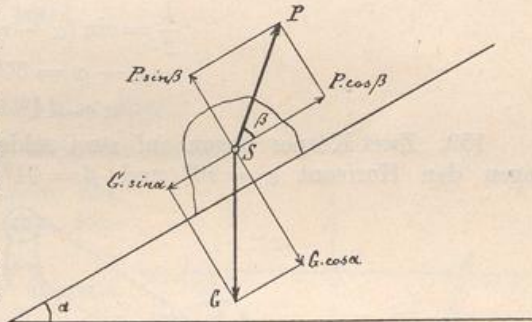


Fig. 138.

Auflösung: ad a) Die Reibung wirkt mit der Komponente $P \cos \beta$; der Normdruck ist

$$G \cos \alpha - P \sin \beta$$

Daher muß sein

$$\begin{aligned}
 G \sin \alpha &= P \cos \beta + f (G \cos \alpha - P \sin \beta) \\
 G (\sin \alpha - f \cos \alpha) &= P (\cos \beta - f \sin \beta) \\
 G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} &= P \frac{\cos \beta \cos \varphi - \sin \beta \sin \varphi}{\cos \varphi} \\
 G \sin (\alpha - \varphi) &= P \cos (\beta + \varphi) \\
 \mathbf{P} &= \mathbf{G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos (\beta + \varphi)}} \dots \dots \dots \mathbf{(131a)}
 \end{aligned}$$

ad b) wird
$$\mathbf{P} = \mathbf{G \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos (\beta - \varphi)}} \dots \dots \dots \mathbf{(131b)}$$

In diesem Falle sind die früheren als spezielle enthalten.

a) Wird $\beta = 0$, dann kommt man auf Aufgabe 155 zurück; es wird

$$P = G \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$$

β) Wird $\beta = -\alpha$, dann folgt der in Aufgabe 156 behandelte Fall und ergibt sich

$$P = G \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)$$

158. Unter welchem Winkel muß eine schiefe Ebene gegen den Horizont geneigt sein, damit ein Körper mit dem Gewichte G kg auf ihr durch eine Kraft $P = G$ kg, welche mit der schiefen Ebene den Winkel $\beta = 46^\circ$ bildet, vor Hinuntergleiten bewahrt werde? $f = 0,25$.

Auflösung: Der Ansatz ist derselbe wie in der vorigen Aufgabe, nur ist statt $P \dots G$ zu setzen.

$$G \sin \alpha = G \cos \beta + f(G \cos \alpha - G \sin \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta + f \cos \alpha - f \sin \beta$$

$$\sin \alpha - f \cos \alpha = \cos \beta - f \sin \beta$$

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} = \frac{\cos(\beta + \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$\sin(\alpha - \varphi) = \cos(\beta + \varphi)$$

$$f = 0,25 = \operatorname{tg} \varphi$$

$$\varphi = 14^\circ$$

$$\cos(\beta + \varphi) = \cos(46^\circ + 14^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \sin(\alpha - \varphi)$$

$$\alpha - \varphi = 30^\circ$$

$$\alpha \sim 44^\circ$$

159. Zwei Körper liegen auf zwei schiefen Ebenen, deren Neigungswinkel gegen den Horizont $\alpha = 36^\circ$ und $\beta = 54^\circ 30'$ betragen. Wie groß ist das

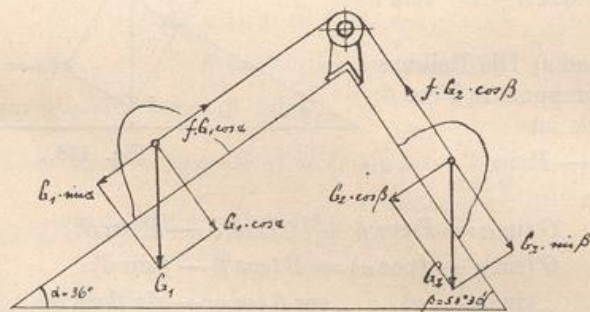


Fig. 139.

Verhältnis der Gewichte der Körper, wenn sie sich im Gleichgewichte befinden und $f = 0,105$ ist?

Auflösung: $G_1 \sin \alpha - f G_1 \cos \alpha = G_2 \sin \beta - f G_2 \cos \beta$

$$G_1 \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} = G_2 \cdot \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{\sin(54^\circ 30' - 6^\circ)}{\sin(36^\circ - 6^\circ)}$$

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{0,75}{0,5}$$

$$\frac{G_1}{G_2} = 1,5$$

$$\frac{G_1}{G_2} = 1,5$$

160. Ein Wagen mit dem Gewichte Q kg soll eine Ebene von $s^0/0$ Steigung hinaufgezogen werden. Wie groß ist die nötige Zugkraft, wenn der Koeffizient der Gesamtreibung k ist?

Auflösung: Die Zugkraft muß gleich sein der die Straße hinunterwirkenden Komponente $Q \sin \alpha$ plus dem Widerstande $kQ \cos \alpha$.

$$P = Q \cdot \sin \alpha + kQ \cos \alpha$$

$$P = Q (\sin \alpha + k \cos \alpha)$$

Die Straße hat $s^0/0$ Steigung, d. h. auf s Meter Höhenzuwachs kommen 100 Meter Straßenlänge. Die Tangente von α ist daher $\frac{s}{100}$, somit

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$P = Q \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} + k \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right) \quad \text{oder}$$

$$P = \frac{Q}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{100}\right)^2}} \cdot \left(\frac{s}{100} + k \right)$$

§ 42. Der Keil.

a) Der doppelte Keil.

Der in Fig. 140 skizzierte doppelte Keil ACB soll durch eine Kraft P zum Eindringen gebracht werden.

Die Fläche, in der die Kraft angreift, heißt **Rücken des Keiles**, die sich in der Kante A schneidenden Flächen werden als **Seiten des Keiles** bezeichnet.

Dem Eindringen des Keiles wirken entgegen α) die Widerstände Q , β) die Reibungswiderstände fQ . Erstere ergeben die Resultierende R_1 , letztere R_2 . Sind R_1 und R_2 zusammen gleich P , dann ist Gleichgewicht vorhanden und wird

$$P = R_1 + R_2 = 2Q \sin \alpha + 2fQ \cos \alpha$$

$$P = 2Q (\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

$$P = 2Q \left(\sin \alpha + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha \right)$$

$$P = 2Q \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} \quad (132)$$

Das Zurückgehen des Keiles wird verhindert durch eine Kraft

$$P_1 = 2Q \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \quad (132a)$$

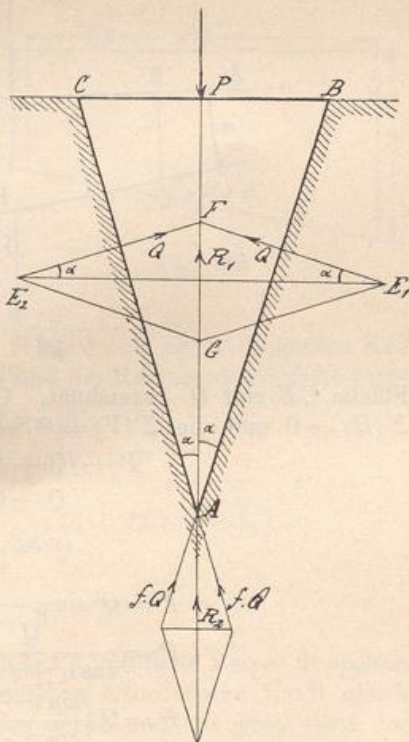


Fig. 140.