Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 42. Der Keil. Beispiele 161-164

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

160. Ein Wagen mit dem Gewichte Q kg soll eine Ebene von $s\,^0/_0$ Steigung hinaufgezogen werden. Wie groß ist die nötige Zugkraft, wenn der Koeffizient der Gesamtreibung k ist?

Auflösung: Die Zugkraft muß gleich sein der die Straße hinunterwirkenden Komponente $Q \sin\alpha$ plus dem Widerstande $kQ\cos\alpha$.

$$P = Q \cdot \sin\alpha + kQ\cos\alpha$$
$$P = Q(\sin\alpha + k\cos\alpha)$$

Die Straße hat $s\,^0/_0$ Steigung, d. h. auf s Meter Höhenzuwachs kommen 100 Meter Straßenlänge. Die Tangente von α ist daher $\frac{s}{100}$, somit

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \text{ und } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$P = Q\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} + k\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right) \text{ oder}$$

$$\boldsymbol{P = \frac{Q}{\sqrt{1+\left(\frac{s}{100}\right)^2}} \cdot \left(\frac{s}{100} + k\right)}$$

§ 42. Der Keil.

a) Der doppelte Keil.

Der in Fig. 140 skizzierte doppelte Keil ACB soll durch eine Kraft P zum Eindringen gebracht werden.

Die Fläche, in der die Kraft angreift, heißt **Rücken des Keiles**, die sich in der Kante A schneidenden Flächen werden als **Seiten des Keiles** bezeichnet.

Dem Eindringen des Keiles wirken entgegen α) die Widerstände Q, β) die Reibungswiderstände fQ. Erstere ergeben die Resultierende R_1, letztere R_2. Sind R_1 und R_2 zusammen gleich P, dann ist Gleichgewicht vorhanden und wird

$$P = R_1 + R_2 = 2Q\sin\alpha + 2fQ\cos\alpha$$
$$P = 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$
$$P = 2Q\left(\sin\alpha + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha\right)$$
$$\boldsymbol{P = 2Q\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}} \quad (132)$$

Das Zurückgehen des Keiles wird verhindert durch eine Kraft

$$\boldsymbol{P_1 = 2Q\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}} \quad (132\,a)$$

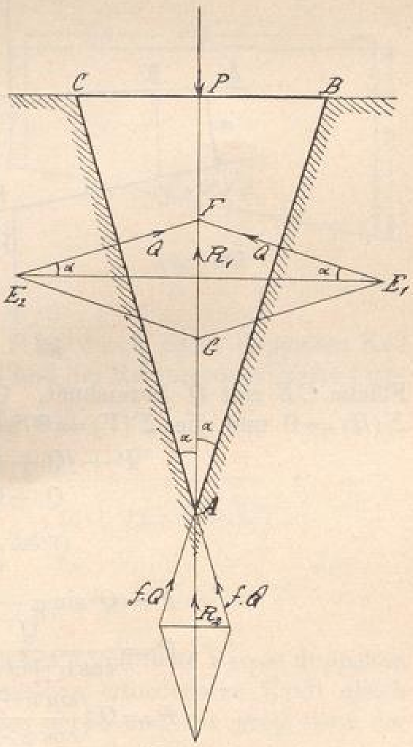

Fig. 140.

Die Reibung wirkt nämlich in diesem Falle entgegengesetzt wie früher, so daß f negativ zu setzen ist.

Wird $(\alpha - \varphi) > 0$, was für $\alpha > \varphi$ zutrifft, dann ist $P_1 > 0$, d. h. es muß zum Eintreiben des Keiles eine Kraft vorhanden sein.

Wenn $\alpha - \varphi = 0$ sich ergibt, was der Fall für $\varphi = \alpha$ ist, folgt $P_1 = 0$. d. h. der Keil geht nicht zurück; er wird vor Zurückgehen durch Reibung bewahrt.

Die Kraft P_1 ist kleiner als Null (negativ), wenn $\varphi > \alpha$ ist, d. h. es gehört noch eine Kraft dazu, den Keil aus dem Materiale, in welches er eingedrungen ist, herauszuziehen. Keile mit $\alpha < \varphi$ nennt man **Befestigungskeile.**

„Unter **Wirkungsgrad eines Keiles** versteht man das Verhältnis aus der zum Eintreiben desselben theoretisch nötiger und der praktisch nötigen (wirklichen) Kraft.“

Daher wird $\eta = \dfrac{2Q \sin \alpha}{2Q \dfrac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}} = \dfrac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi}$

$$\eta = \frac{1}{1 + f \cot \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(133)}$$

b) Der einfache Keil.

Zunächst werde die Kraft abgeleitet, um ein Herausspringen des Keiles zu verhindern. Hierzu Fig. 141.

Der Druck senkrecht zur Fläche BD werde mit Q, der senkrecht zur

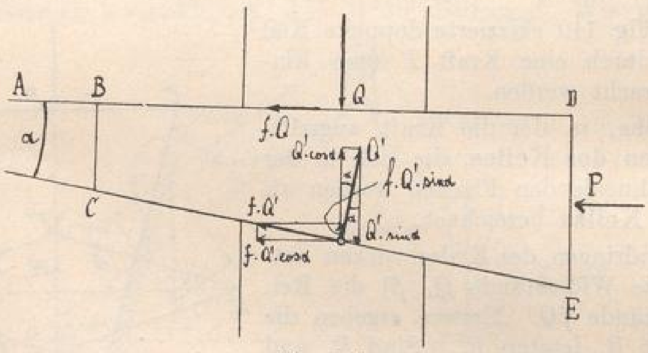

Fig. 141.

Fläche CE mit Q' bezeichnet. Gleichgewicht ist nun vorhanden, wenn die $\Sigma(H) = 0$ und die $\Sigma(V) = 0$ ist. Sonach folgen die Gleichungen

$$P + fQ + fQ' \cos \alpha - Q' \sin \alpha = 0$$

$$Q - Q' \cos \alpha - fQ' \sin \alpha = 0$$

$$Q' = \frac{Q}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

$$P = Q' \sin \alpha - fQ - fQ' \cos \alpha$$

$$P = \frac{Q}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \cdot (\sin \alpha - f \cos \alpha) - fQ$$

$$P = Q \left(\frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} - f \right), \text{ somit}$$

$$\boldsymbol{P = Q \cdot [\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) - \operatorname{tg} \varphi]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(134)}$$

Die Kraft, um das Eindringen einzuleiten, ist

$$\boldsymbol{P = Q \cdot [\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) + \operatorname{tg}\varphi]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(134a)}$$

Der Wirkungsgrad des einfachen Keiles wird

$$\eta = \frac{Q \operatorname{tg}\alpha}{Q[\operatorname{tg}(\alpha+\varphi) + \operatorname{tg}\varphi]}$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi) + \operatorname{tg}\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{(135)}$$

Beispiele.

161. Wann ist ein einfacher Keil selbsthemmend?

Auflösung: Zum Herausziehen des Keiles ist eine Kraft

$$P = Q[\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) - \operatorname{tg}\varphi]$$

nötig. **Selbsthemmend** heißt der Keil, wenn $P = 0$ wird. Die Bedingung für Selbsthemmung lautet daher

$$\alpha - \varphi \leqq \varphi \text{ oder}$$

$$\alpha \leqq 2\varphi$$

162. Welcher Druck ist nötig, um mit der nicht angezogenen Fläche eines einfachen Keiles, Fig. 142, einen Druck von 300 kg auszuüben? $f = 0{,}18$.

Auflösung:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{40}{400} = 0{,}1$$

$$\alpha = 5^0\,43'$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}18$$

$$\varphi = 10^0\,12'$$

$$P = 300\,[\operatorname{tg}(5^0\,43' + 10^0\,12') + \operatorname{tg} 10^0\,12']$$

$$P = 300 \cdot (\operatorname{tg} 15^0\,55' + \operatorname{tg} 10^0\,12')$$

$$\boldsymbol{P \sim 136 \text{ kg}}$$

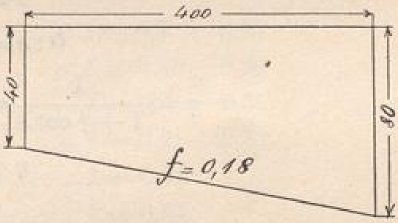

Fig. 142.

163. Welchen Druck Q kann man mit P kg durch einen doppelten Keil erzeugen, wenn dessen Rücken b, dessen Seite s und der Reibungskoeffizient f ist?

Auflösung: $$P = 2Q(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

$$Q = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{\frac{b}{2s} + f\sqrt{1 - \frac{b^2}{4s^2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\frac{1}{2s} \cdot [b + f\sqrt{4s^2 - b^2}]}$$

$$\boldsymbol{Q = \frac{P \cdot s}{b + f\sqrt{4s^2 - b^2}}}$$

164. In welchem Verhältnisse müssen Rücken b und Seite s eines doppelten Keiles stehen, damit die zum Eintreiben desselben erforderliche Kraft gleich $^1/_2$ des auf seine Seite wirkenden Widerstandes werde und wie groß wird der Wirkungsgrad dieses Keiles? $f = 0{,}18$.

Auflösung:
$$P = \frac{Q}{2}$$
$$P = 2Q \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}, \text{ d. h.}$$
$$\frac{1}{2} Q = 2Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$$
$$\frac{\cos \varphi}{4} = \sin(\alpha + \varphi)$$
$$f = 0{,}18$$
$$\varphi = 10^0\, 12'$$
$$\frac{\cos \varphi}{4} = \frac{0{,}985}{4} = 0{,}246$$
$$\sin(\alpha + \varphi) = 0{,}246$$
$$\alpha + \varphi = 14^0\, 15'$$
$$\alpha = 4^0\, 3'$$
$$\sin \alpha = 0{,}071 = \frac{b}{2s}$$
$$\frac{b}{s} = 0{,}142 = \frac{1}{x}$$
$$x = 7{,}15$$
$$\boldsymbol{b : s = 1 : 7{,}15}$$
$$\eta = \frac{1}{1 + f \cot \alpha} = \frac{1}{1 + 0{,}18 \cdot \cot 4^0\, 3'}$$
$$\eta \sim \mathbf{0{,}274}$$

§ 43. Die Reibungsräder (Friktionsräder).

Bei den Reibungsrädern erfolgt die Arbeitsübertragung durch Aneinanderpressen zweier glatten Oberflächen.

a) Zylindrische Reibungsräder.

Um eine gleichmäßige Arbeitsübertragung mit zylindrischen Reibungsrädern zu bewirken, ist es notwendig, die Räder mit solcher Kraft aneinander zu pressen, daß die in der Berührungslinie ihrer Umfangsflächen erzeugte Reibung wenigstens der am Umfange des getriebenen Rades auftretenden Umfangskraft P gleichkommt, da sonst ein Gleiten eintreten würde. Es muß somit sein
$$P \leqq fQ.$$

Ist dies der Fall, so wickeln sich in der nämlichen Zeit gleiche Umfänge des treibenden und des getriebenen Rades ab, d. h. die Winkelgeschwindig-