Die Mechanik fester Körper

Blau, Ernst

Hannover, 1905

§ 44. Die Schraube. Beispiele 169-175

urn:nbn:de:hbz:466:1-76868

§ 44. Die Schraube.

Eine Last durch eine am Umfange einer Schraube wirkende Kraft heben, Fig. 147, ist dasselbe, als diese durch eine horizontal wirkende Kraft eine schiefe Ebene mit der Basis $2 r \pi$ und der Höhe h hinaufzuziehen. Dann folgt

$$P = Q \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)$$

Soll die Schraube **„selbsthemmend"** sein, so muß noch eine Kraft P nach entgegengesetzter Richtung aufgewendet werden, damit die Last zum Sinken gebracht wird, d. h. es muß sein

$$P = Q \cdot tg\, (\alpha - \varphi)$$

Die Bedingung für die Selbsthemmung ist

$$\alpha < \varphi \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{(140)}$$

„Der **Steigungswinkel der Schraube** muß kleiner sein als der **Reibungswinkel.**"

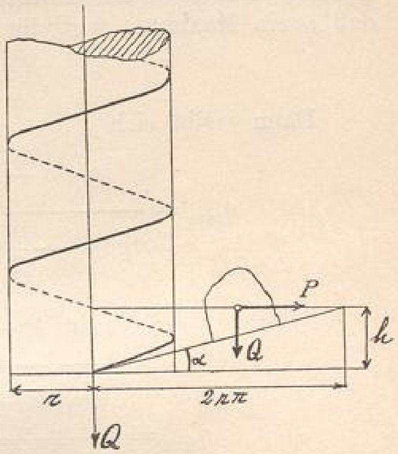

Fig. 147.

Sitzt auf der Spindel ein Handrad mit dem Radius R, so ist zum Heben der Last am Umfange desselben eine Kraft P_1

$$\boldsymbol{P_1 = \frac{R}{r} Q \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(141)}$$

nötig. — Soll die Ganghöhe der Schraube in der Formel auftreten, dann ist

$$P_1 = \frac{r}{R} Q \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi} = \frac{r}{R} Q \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2 r \pi}$$

$$\boldsymbol{P_1 = \frac{r}{R} Q \cdot \frac{\frac{h}{2 r \pi} \pm f}{1 \mp f \cdot \frac{h}{2 r \pi}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(142)}$$

Das Pluszeichen gilt für Heben, das Minuszeichen für Senken der Last.

Ohne Rücksicht auf Reibung ergibt sich die zum Heben der Last Q am Umfange der Schraube nötige Kraft mit $Q \cdot \operatorname{tg} \alpha$, mit Rücksicht auf dieselbe mit $Q \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)$.

„Das Verhältnis der am Umfange der Schraube zum Heben der Last nötigen theoretischen zu der dort nötigen praktischen Kraft heißt der **Wirkungsgrad der Schraube.**"

Derselbe ist also

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(143)}$$

Der Wirkungsgrad η wird kleiner, wenn bei gleichem α der Reibungswinkel φ größer wird. Schwieriger zu erkennen ist, wie sich η mit α bei konstant bleibendem φ ändert.

Wenn φ z. B. 10^0 und konstant ist, folgt

bei $\alpha = 10^0,\ 20^0,\ 30^0,\ 40^0,\ 50^0,\ 60^0,\ 70^0$

$\eta = 0{,}48,\ 0{,}63,\ 0{,}69,\ 0{,}71,\ 0{,}69,\ 0{,}63,\ 0{,}48.$

D. h. laut tabellarischer Aufstellung liegt der günstigste Wirkungsgrad η bei $\alpha \sim 40^0$. — Mit Hilfe der höheren Mathematik kann gezeigt werden, daß η ein Maximum wird für

$$\alpha = 45 - \frac{\varphi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(144)}$$

Dann ergibt sich

$$\eta_{max} = \frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2} + \varphi\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cot\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\eta_{max} = \frac{\dfrac{\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}}{\dfrac{\cos\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}} = \frac{\sin^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\eta_{max} = \frac{1 - \cos(90 - \varphi)}{1 + \cos(90 + \varphi)}$$

$$\boldsymbol{\eta_{max} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(145)}$$

Beispiele.

169. Der mittlere Radius einer Schraube ist 3 cm, die Ganghöhe 1 cm, der Reibungskoeffizient $f = 0{,}14$. — Welche Last kann mit 50 kg an einem Handrad auf der Schraube von $R = 0{,}6$ m gehoben werden?

Auflösung: $$P = \frac{r}{R} Q \frac{\dfrac{h}{2r\pi} + f}{1 - f\dfrac{h}{2r\pi}} = \frac{3}{60} Q \frac{\dfrac{1}{6\pi} + 0{,}14}{1 - 0{,}14 \cdot \dfrac{1}{6\pi}} = 50$$

$$Q = \frac{50 \cdot 60}{3} \cdot \frac{6\pi - 0{,}14}{1 + 6\pi \cdot 0{,}14} = \frac{1000 \cdot 18{,}66}{3{,}64}$$

$$\mathbf{Q \sim 5140\ kg}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2r\pi} = \frac{1}{6\pi} \sim 0{,}053$$

$$\alpha = 3^0 2' 12''$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}14; \quad \varphi = 7^0 58' 11''$$

$$\alpha < \varphi,$$

d. h. die Schraube ist selbsthemmend.

170. Welche Last kann mit einer Schraube, deren innerer Durchmesser 40 mm, deren äußerer Durchmesser 50 mm und deren Ganghöhe 15,7 mm sind, gehoben werden, wenn die Umfangskraft an dem auf ihr sitzenden Handrad von 450 mm Durchmesser 10 kg beträgt? $f = 0{,}105$.

Auflösung: Der mittlere Durchmesser der Schraube ist 45 mm, daher wird

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{15{,}7}{45\,\pi} = 0{,}111;\quad \alpha \sim 6^0 20'$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}105;\quad \varphi \sim 6^0$$

$$P = \frac{r}{R}\,Q \cdot \operatorname{tg} 12^0 20'$$

$$Q = \frac{P \cdot R}{r \cdot \operatorname{tg} 12^0 20'} = \frac{10 \cdot 0{,}45}{0{,}0225 \cdot 0{,}218}$$

$$\mathbf{Q \sim 920\ kg}$$

171. Die Schraube eines Schnekkentriebes hat die Dimensionen $r = 11$ cm, $h = 13$ cm. Wie groß ist ihr Wirkungsgrad, wenn $f = 0{,}15$ ist?

Auflösung:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\,r\,\pi} = \frac{13}{22\,\pi} = 0{,}188$$

$$\alpha = 10^0\,40'$$

$$f = 0{,}15$$

$$\varphi = 8^0\,32'$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} 10^0\,40'}{\operatorname{tg} 19^0\,12'}$$

$$\eta = \frac{0{,}188}{0{,}349}$$

$$\eta = \mathbf{0{,}54}$$

172. Welche Kraft P ist am Handrad nach gegebener Skizze zum Heben der Turbinenhohlwelle nötig? $f = 0{,}105$. Fig. 148.

Auflösung:

$$\text{Spindel I} \begin{cases} \text{Dchm. außen } 170 \text{ mm} \\ \text{Dchm. innen } 130 \text{ mm} \\ \text{Steigung } 42{,}3 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{Spindel II} \begin{cases} \text{Dchm. außen } 110 \text{ mm} \\ \text{Dchm. innen } 90 \text{ mm} \\ \text{Steigung } 28{,}3 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{42{,}3}{150\,\pi} = 0{,}09;\quad \alpha_1 = 5^0\,10'$$

$$f = 0{,}105;\quad \varphi = 6^0$$

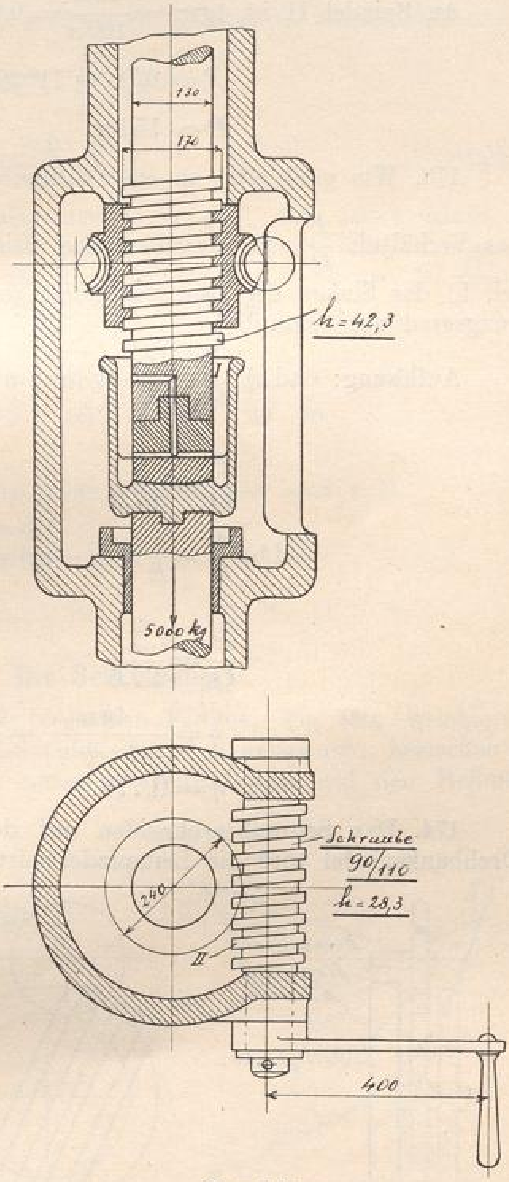

Fig. 148.

P_1 am Umfange der Spindel I ist

$$P_1 = 5000 \cdot \operatorname{tg} 11^0\,10'$$

$$P_1 = 5000 \cdot 0{,}1975$$

$$P_1 \sim 987{,}5 \text{ kg}$$

Reduziert auf den Umfang des Schneckenrades wird die nötige Kraft

$$P_2 = 987{,}5 \cdot \frac{150}{240} \sim 620 \text{ kg}$$

Demnach an der Kurbel nötig

An Spindel II ist $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{28{,}3}{100\,\pi} = 0{,}09;\ \alpha_2 = 5^0\,10'$

$$P = 620 \cdot \operatorname{tg} 11^0\,20' \cdot \frac{50}{400} = 620 \cdot 0{,}1975 \cdot \frac{1}{8}$$

$$\boldsymbol{P \sim 15\ \mathbf{kg}}$$

173. Wie groß muß an einer Schraube mit $\alpha = 42^0$, $\varphi = 6^0$ und $\frac{R}{r} = \frac{1}{20}$ das Verhältnis $\frac{P}{Q}$ sein, damit a) eine gleichförmige Hebung der Last möglich sei, b) das Sinken der Last verhindert werde? Wie groß ist ferner der Wirkungsgrad der Schraube?

Auflösung: ad a) $\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{1}{20} \operatorname{tg} 48^0 = \frac{1{,}1106}{20} = \frac{1}{\frac{20}{1{,}1106}}$

$$\boldsymbol{\frac{P}{Q} = \frac{1}{17{,}9}}$$

ad b) $\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{0{,}72654}{20} = \frac{1}{\frac{20}{0{,}72654}}$

$$\boldsymbol{\frac{P}{Q} = \frac{1}{27{,}6}}$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{0{,}8693}{1{,}1106}$$

$$\eta = \mathbf{0{,}778}$$

174. Das Schraubenschneiden auf der Drehbank. Fig. 149. Von der Drehbankspindel wird die Leitspindel mittels der Räder a, b, c, d angetrieben. a, b, c, d bedeuten gleichzeitig die Zähnezahlen dieser Räder. Von letzteren sind b und c auswechselbar (Wechselräder). Macht nun die Drehbankspindel s Umdrehungen, so besitzt die Leitspindel

$$l = s\,\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

Umdrehungen, so daß sich ergibt

$$\frac{l}{s} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

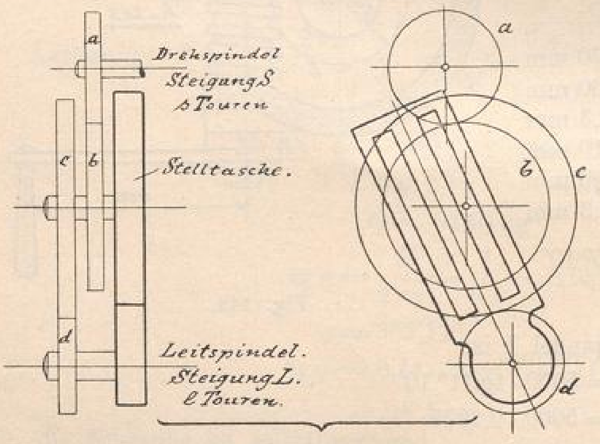

Fig. 149.

Es ist nun leicht einzusehen, daß die Verschiebung des Supportes pro Umdrehung der Leitspindel um so größer wird, je größer der Wert $\frac{ac}{bd}$ ist. —

Die Verschiebung des Supportes ist aber gleich der Steigung der zu schneidenden Schraube und auch gleich der Steigung der Leitspindel L mal der auf eine Drehung der Drehbankspindel entfallende Drehung der Leitspindel, d. i. $\frac{L}{S}$,

mithin ist $$S = L \cdot \frac{l}{s}, \text{ also}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{ab}{cd} \cdot L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(146)}$$

175. Auf einer Drehbank mit einer Leitspindel, bei der 3 Gänge auf einen Zoll gehen, soll eine Schraube geschnitten werden, welche 5 Gänge auf einen Zoll hat. Vorhanden sind die Räder a und d mit 24 und 20 Zähnen. Welche Wechselräder sind in die Stelltasche zu geben?

Auflösung: $$\frac{S}{L} = \frac{ab}{cd} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} = \frac{30}{50} = \frac{5 \cdot 6}{10 \cdot 5} = \frac{24}{20} \cdot \frac{5}{10}$$

Die Zähnezahlen der zu nehmenden Wechselräder sind z. B.

$$\boldsymbol{b = 30 \text{ und } c = 60}$$

oder $$\boldsymbol{b = 25 \text{ und } c = 50}$$

---

§ 45. Die Seilreibung.

An den freien Enden eines biegsamen Fadens, Fig. 150, welcher um einen festen Zylinder gelegt ist und den Bogen $\widehat{\alpha}$ umspannt, herrschen die Spannungen t und T. Soll nun unter Rücksichtnahme auf den Reibungs-

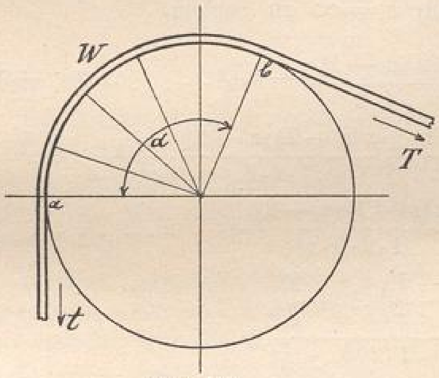

Fig. 150.

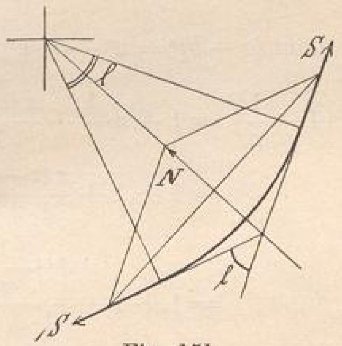

Fig. 151.

widerstand W die geringste Vermehrung von T eine Bewegung in der Richtung von T zur Folge haben, so muß gelten

$$T = t + W \quad \text{oder}$$
$$W = T - t$$